HAL open science

Trigonométrie pythagoricienne

Serge Perrine

To cite this version:

Serge Perrine. Trigonométrie pythagoricienne. 2014. hal-01006059v4

HAL Id: hal-01006059

https://centralesupelec.hal.science/hal-01006059v4

Preprint submitted on 1 Sep 2014 (v4), last revised 5 Jan 2015 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Trigonométrie pythagoricienne

Serge Perrine

Campus de Metz de Supélec, 2 Rue Edouard Belin, 57070 METZ
E-mail address: serge.perrine@supelec.fr ; sp52@wanadoo.fr

Abstract. Après avoir rappelé le contexte de la construction des premières tables de trigonométie à l'époque de Ptolémée et la synthèse qu'en fit Carnot au début du 19ème siècle, le présent article évoque trois types de démonstrations du théorème de Pythagore. Il montre comment la notion de table de trigonométrie pythagoricienne introduite ici permet d'interpréter la fameuse tablette babylonienne Plimton 322, et il en évoque la précision stupéfiante. Abordant la question de la mesure des angles, il montre autour du mécanisme d'Anticythère comment les grecs ont certainement utilisé plus d'outils que la règle et le compas seuls, notamment car ils ont modélisé les trajectoires des planètes avec des épicycloïdes. Ces deux outils permettent cependant de construire un pentagone régulier. L'article montre l'équivalence par ces outils de la mesure de l'unité ou de celle du nombre d'or. Il donne des triplets pythagoriciens construits avec les nombres de Fibonacci. Revenant sur les démontrations par puzzles, il montre comment certaines illusions d'optique peuvent en résulter, et comment elles donnent naissance à certains jeux d'esprit comme le Stomachion d'Archimède. A l'époque contemporaine, ces jeux sont toujours sérieusement d'actualité, et avec la contruction en moulin à vent ils ont permis d'exhiber de nouveaux pavages du plan et des fractales. L'article rappelle pour finir comment tous les triangles pythagoriciens sont déductibles de façon unique du triplet (3,4,5) par une construction arborecente qui éclaire la tablette Plimton 322 d'un jour nouveau. Il se termine sur l'évocation d'un résultat de Stewart généralisant le théorème de Pythagore.

Trigonométrie pythagoricienne

En souvenir de nos discussions du samedi matin,

à Claude Genzling, le "géomètre de Vénus".

1. Introduction

Hipparque, qui vivait à Rhodes vers 160 avant J.C., est habituellement présenté comme le promoteur de l'usage du système de numération hexadécimal hérité des babyloniens pour mesurer les **arcs**, et aussi comme le créateur de la première table de trigonométrie. En tant qu'astronome il composa un catalogue de plus de mille étoiles, s'intéressa au mouvement des planètes, et fut le premier à localiser un point sur le surface terrestre par sa longitude et sa latitude. W. W. Rouse Ball indique dans son *Histoire des Mathématiques* [**78**] "qu'il construisit une table des valeurs des **cordes** d'un certain nombre d'arcs, ce qui est pratiquement la même chose qu'une table des sinus naturels" : $cord(\theta) = 2\sin(\theta/2)$. Egalement, il affirme que l'on pense qu'Hipparque est l'auteur du **théorème de Ptolémée** qui apparait au Livre 1, ch. 9 de l'*Almageste* (ou *Composition mathématique* [**72**]), c'est à dire dans la grande compilation réalisée par Ptolémée vers 150 avant J.C. des connaissances astronomiques de son époque ([**31**] [**1**] [**2**] [**3**] [**32**]). Ce théorème dit que dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des deux diagonales est égal à la somme des produits des deux côtés opposés :

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC.$$

En réalité ce dernier résultat "contient implicitement les formules pour le développement de $\sin(\alpha \pm \beta)$ et $\cos(\alpha \pm \beta)$ et Carnot a montré comment on pouvait en déduire toutes les formules de la trigonométrie plane", et notamment la **formule de soustraction** :

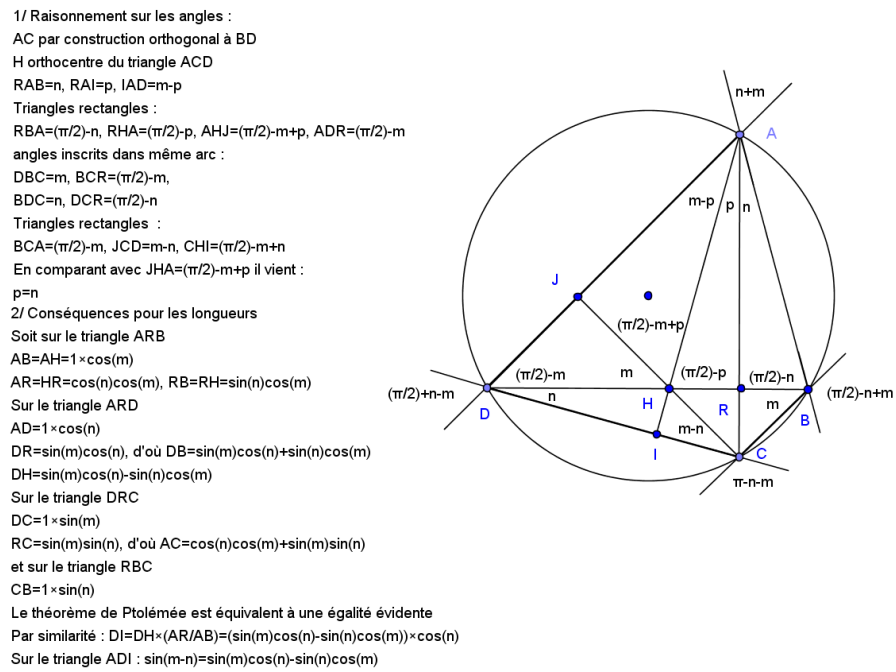
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Les **formules de Carnot**, sont usuellement désignées comme étant les suivantes :

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha,\ 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Mais au début du 19ème siècle, Lazare Carnot [**4**] a pu développer la démarche beaucoup plus générale évoquée avant et inspirée du théorème de Ptolémée. Il a montré comment toutes les formules de la trigonométrie plane résultaient de la considération d'un quadrilatère inscrit dans un cercle et tel que ses diagonales sont orthogonales ([**5**]). Ce résultat est établi dans sa *Géométrie de Position* [**34**] (Problème VII p. 151) et est résumé dans la figure 43 de ce même ouvrage. On reproduit cette figure ici en donnant des explications sur l'évaluation des arcs,

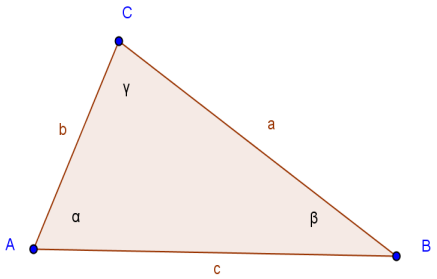
appelés aussi avec un terme moins militaire les **angles**, et sur l'évaluation des longueurs par le théorème de Thalès :



Sur cette figure le théorème de Brahmagupta indique que la perpendiculaire à AB passant par R coupe le segment DC en son milieu, et respectivement pour les autres côtés du quadrilatère.

2. Trigonométrie et théorème de Pythagore

On raisonne dans la suite sur des triangles ABC dont les côtés sont notés a, b, c, et les angles α, β, γ. La figure de référence indiquant comment les points, les segments et les angles sont nommés est la suivante :



Le **théorème de Pythagore** (dit aussi **théorème de la mariée**) énonce que pour un triangle ABC dont deux côtés valent a et b et se rencontrent en C, sommet de l'angle γ, ce dernier angle est droit si et seulement si avec le troisième côté c,

l'hypoténuse, on a :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

C'est Proclus de Lycie (ou Diadochus) (412-486) qui au quatrième siècle après Jésus Christ donna le nom actuel de théorème de Pythagore au théorème 47 du Livre 1 des Eléments d'Euclide [**44**], dans ses Commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide [**60**] ("Si l'on écoute ceux qui veulent raconter l'histoire des anciens temps, on peut en trouver qui attribuent ce théorème à Pythagore et lui font sacrifier un bœuf après sa découverte").

• Si en raisonnant à une similitude près, c'est à dire avec le **théorème de Thalès**, on se ramène à $c = 1$, l'angle opposé à a étant noté α, la précédente égalité s'écrit simplement avec $(a/c) = \sin\alpha$ et $(b/c) = \cos\alpha$:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

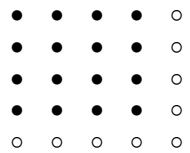
Il est clair avec [**85**] que l'on peut tirer cette égalité des formules de trigonométrie plane à partir de :

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \sin(\alpha - (\alpha - \beta)) \\
&= \sin\alpha\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha \\
&= \sin\alpha\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\cos\alpha\cos\alpha \\
&= (\sin^2\alpha\sin\beta + \cos^2\alpha\sin\beta) \\
&= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\sin\beta.
\end{aligned}$$

Ceci donne une première démonstration du théorème de Pythagore par les moyens de la trigonométrie. Or Pythagore vécut entre 570 et 500 avant J.C., c'est à dire bien avant Hipparque. Jamblique ([**56**] p. 11) dit qu'il rencontra son ainé Thalès à Milet qui "lui donna part à toutes les connaissances dont il disposait" et qui "l'incita à cingler vers l'Egypte et à aller rencontrer tout particulièrement les prêtres de Memphis". Il est probable qu'il ne déduisit pas le théorème qui lui est attribué ([**13**]) d'une quelconque formule de trigonométrie. Sa connaissance du sujet vint sans doute d'ailleurs. "Il passa ainsi vingt-deux ans en Egypte dans le secret des temples à s'adonner à l'astronomie et à la géométrie ... jusqu'au moment où fait prisonnier par les troupes de Cambyse, il fut amené à Babylone. Et là il passa son temps avec les mages ... il parvint au sommet de l'arithmétique, de la musique et des autres sciences mathématiques. Ayant encore séjourné chez eux douze ans, il revint à Samos, alors qu'il avait environ cinquante-six ans." Pythagore connaissait donc certainement la corde à 13 noeuds des anciens batisseurs qui l'utilisaient en tant qu'outil de construction, c'est à dire comme une équerre pour tracer des angles droits. Il savait que bien tendue elle donne le "**triangle sacré**" $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ correspondant à un triangle rectangle dont les côtés vérifient :

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Remarquons cependant que les écrits égyptiens qui nous sont parvenus comme le papyrus Rhind [**75**] qui date de 1650 avant J.C. ne mentionnent pas ce genre de résultat. Sans support géométrique, mais avec un carré de cailloux figurant le nombre $16 = 4^2$ auquel on ajoute le **gnomon** de $9 = 3^2$ sur deux cotés adjacents de ce carré, on fabrique aisément la figuration du nombre $25 = 5^2$:



Ce même raisonnement donne pour tout entier $x > 0$ la condition plus générale :

$$(1 + 2x) + x^2 = (x + 1)^2.$$

Dans le cas particulier où $1+2x = m^2$, on obtient une autre **formule de Pythagore** à partir de l'expression de x en fonction de m :

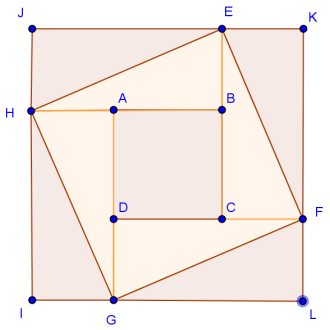
$$m^2 + (\frac{m^2 - 1}{2})^2 = (\frac{m^2 + 1}{2})^2.$$

On a une infinité de possibilités avec m impair, et par exemple $m = 5$ donne :

$$5^2 + 12^2 = 13^2.$$

Mais avec le théorème de Pythagore on sait plus, à savoir que de façon certaine il existe un triangle rectangle d'hypoténuse 13 et de côtés 12 et 5 qui correspond à ce triplet de nombres. La vraie signification du théorème n'est donc pas de produire une telle égalité qui n'est d'ailleurs qu'une propriété arithmétique, mais de comprendre d'un point de vue géométrico-algèbrique qu'elle correspond à un triangle rectangle.

2.1. Démonstrations et applications. En prenant quatre triangles rectangles de cotés $a \leq b$ et d'hypoténuse c, et en les disposant de façon aussi compacte que possible autour d'un carré de côté $b - a$, on fabrique un carré de côté c :



Le calcul de la surface de ce carré de deux façons différentes donne :

$$c^2 = (b - a)^2 + 4(\frac{a \times b}{2}) = a^2 + b^2.$$

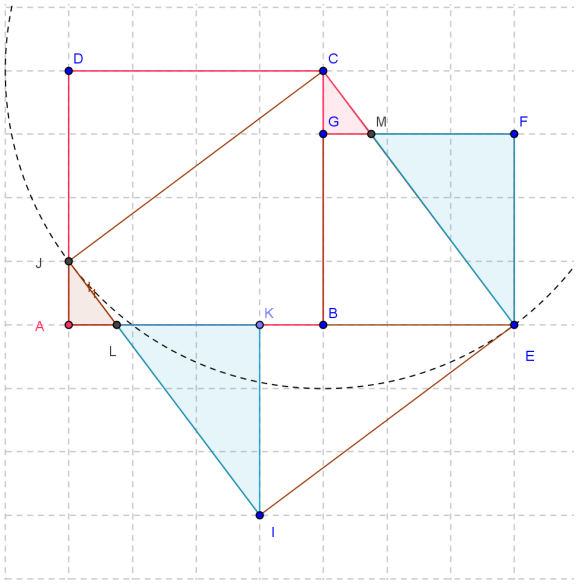
On peut ajouter quatre autres triangles rectangles identiques pour en déduire un carré de côté $(a + b)$. On a alors :

$$c^2 = (a + b)^2 - 4(\frac{a \times b}{2}) = a^2 + b^2.$$

Avec la première de ces démonstrations du théorème de Pythagore, on retrouve la figure de Liu Hui qui apparait dans les *Neuf chapitres* ([**64**] p. 674). Cet antique traité de mathématiques chinois ([**8**]), dont tous les rédacteurs sont pour la plupart inconnus, de même que les dates de rédaction des parties qui le composent, joue

dans la tradition orientale un rôle comparable à celui des *Eléments* d'Euclide ([**44**]) dans la tradition occidentale. En Chine le théorème de Pythagore est appelé le **théorème de Gougu** (base et élévation). Il apparait également dans un très ancien livre d'astronomie, le *Zhou Bi Suan Jing* (dit aussi Tchou Pei ecrit vers 1100 avant J. C., voir [**8**]). En d'autres termes, ce théorème parait avoir de beaucoup précédé Pythagore lui-même, et il a peut-être été découvert dans l'Orient lointain entre 2025 et 1825 avant J. C. [**35**] et commenté sur la route de la soie [**87**] [**74**]. Peu de traces le confirment hors quelques tablettes babyloniennes comme la BM 85 194, ou la Db 2 146 datée de 1775 avant J.C., trouvée dans les ruines de Ešnunna, citée par Jens Høyrup dans [**86**], ainsi que la tablette *Plimton* 322 qui est un objet central de ce qui est évoqué dans la suite du présent article ([**65**] pp.58-62). On sait aussi que les peuples qui entrèrent en Inde vers 1500 avant J. C. utilisaient des annexes (*Śulba-sūtra*) de leurs textes sacrés, les *Védas*, pour construire avec des mesures précises liées à des triplets d'entiers les autels où ils procédaient à leurs rites sacrificiels [**40**], [**70**]. Le *Śulba-sūtra* écrit par Baudhāyana vers 800 avant J.C. contient un cas particulier du théorème de Pythagore (Bsl.1.12), et mentionne (Bsl.1.13) cinq triplets $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(8, 15, 17)$, $(7, 24, 25)$ et $(12, 35, 37)$. Le *Śulba-sūtra* écrit par Kātyāyana vers 200 avant J.C. donne une forme générale du théorème de Pythagore. Le sinus apparait aussi dans ces documents.

• Il existe d'autres démonstrations du théorème par une méthode de puzzle. Elle consiste à utiliser des pièces que l'on déplace pour obtenir un objet géométrique ou un autre. Les pièces conservent leur surface dans le déplacement. De sorte que les deux objets géométriques fabriqués ont même surface totale. Ainsi dans la figure qui suit le premier objet est composé de deux carrés et a pour surface totale a^2+b^2, et le second est un seul carré qui a pour surface c^2. Le passage d'un objet à l'autre de ces objets se fait en déplaçant le triangle rouge CGM ainsi que le triangle bleu MFE. La conservation de la surface dans un tel déplacement garantit que l'on a l'égalité de Pythagore $a^2 + b^2 = c^2$.



Il existe une seconde démonstration comparable due à Alexis Clairaut ([**37**]), utilisant une figure obtenue à partir de la précédente en déplaçant vers le haut le carré de surface c^2, de sorte que le point I soit transporté en K. Il suffit alors de déplacer deux triangles identiques sur cette figure pour, comme le dit cet auteur dans son paragraphe XVII, "Faire un quarré égal à deux autres pris ensembles". Il en déduit sans peine au paragraphe suivant le théorème de Pythagore qu'il énonce ainsi : "L'hypothénuse d'un triangle rectangle est son grand côté, et le quarré de ce côté est égal à la somme des quarrés faits sur les deux autres". Une troisième démonstration comparable se trouve dans [**9**]. Elle a été découverte vers 1855 et est due à George Biddle Airy, ou à Philip Kelland.

Ce que l'on vient de voir donne trois autres démonstrations du théorème, cette fois accessibles aux grecs qui vivaient vers 500 avant J.C., c'est à dire à l'époque de Pythagore. En effet on ne fait que déplacer des pièces d'un puzzle qui conservent leur surface. Remarquons que l'on connait aujourd'hui plus de 370 démonstrations de son théorème (voir [**7**] [**61**]), dont de nombreuses par puzzle. Dans les *Eléments de Géométrie* de Legendre (voir [**59**]), l'hypothénuse perd son second h pour s'écrire plus simplement hypoténuse, et le proposition 11 qui explicite le théorème de Pythagore reprend la démonstration classique d'Euclide qu'on a laissée ici de côté (elle est merveilleusement animée dans [**29**]). En fait on peut classer la centaine de démonstrations évoquées ci dessus en trois types, selon l'argument essentiel utilisé. On trouve selon [**7**] des démonstrations par puzzles, par similarité ou par dissection d'angles, c'est dire selon la classification de [**47**] (ou [**15**] ch.II pp.64-195) par "transposition d'éléments", par "équivalence des figures", ou "algébriques".

2.2. Autres résultats de trigonométrie. Tout triplet de nombres réels positifs (a, b, c) est de façon générale représentable dans le plan par un triangle ABC où α angle de sommet A opposé au côté a, β de sommet B opposé à b, γ de sommet C opposé à c. En considérant la droite parallèle à BC passant par A, et les angles alternes-internes qu'elle définit, on a facilement la **somme des angles** du triangle :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Ce résultat a à voir avec le **postulat d'Euclide** qui s'énonce ainsi : Par un point donné A il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à une droite donnée. On trouve dans [**7**] un très intéressant développement qui montre l'équivalence du postulat d'Euclide et de l'énoncé de Pythagore mis sous la seule forme directe : Dans un triangle rectangle le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carré de ses deux autres cotés. En représentant le cercle circonscrit au triangle ABC on retrouve une partie de la figure 43 de Carnot. En traçant la hauteur issue de chacun des sommets du triangle et en calculant sa longueur de deux façons différentes, on trouve la **formule des trois sinus**, où R rayon du cercle circonscrit :

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

En calculant la longueur de chacun des segments qu'elle délimite sur le côté opposé, et en les additonnant, on trouve les trois **formules de projection** :

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta, \qquad b = c\cos\alpha + a\cos\gamma, \qquad c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

En substituant les expressions de a, b, c, en fonction de $2R$, et simplifiant par cette valeur, on obtient trois expressions correspondant à la **formule d'addition** :

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\beta + \gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta.$$

En résolvant le système d'équations en $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, on trouve les trois **formules d'Al-Kashi** :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Pour chacun de ces résultats, on peut comparer les figures sur lesquelles on vient de raisonner à la figure 43 de Carnot ([**34**]) citée précédemment.

• Si $\gamma = (\pi/2)$ angle droit, le triangle est rectangle en γ et tel que vaille le théorème de Pythagore :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Avec $c = 2R$ diamètre du cercle circonscrit, les deux autres angles sont tels que :

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Injectées dans les formules d'Al-Kashi ces expressions redonnent le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\frac{a}{c} = c^2 - a^2, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\frac{b}{c} = c^2 - b^2. \end{aligned}$$

On peut inversement retrouver les relations d'Al-Kashi à partir du théorème de Pythagore. Sur le triangle ABC équipé d'une hauteur issue de B, on fait apparaitre un triangle rectangle correspondant au triplet $(a\sin\gamma, b - a\cos\gamma, c)$. La relation d'Al-Kashi associée s'obtient par simplification de ce que donne le théorème de Pythagore :

$$c^2 = (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2.$$

L'autre triangle rectangle apparaissant sur la même figure correspond au triplet rectangle $(a\sin\gamma, a\cos\gamma, a)$ et à la formule :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

2.3. Formule d'Euclide et variantes. On voit, en conservant γ angle droit et en faisant varier l'angle α par simple rotation de la droite qui porte c que l'on peut trouver de nombreuses relations analogues à $a^2 + b^2 = c^2$ s'écrivant selon la valeur de l'angle α :

$$a_\alpha^2 + b^2 = c_\alpha^2.$$

En particulier, par soustraction :

$$(c_\alpha - a_\alpha)(c_\alpha + a_\alpha) = (c - a)(c + a) = b^2,$$

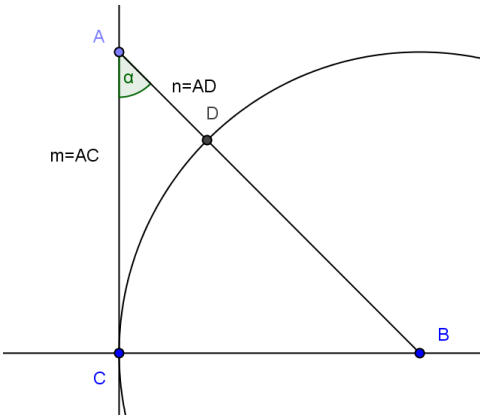
et en introduisant $m = b$ et $n = (c_\alpha - a_\alpha)$ on obtient $(b^2/n) = (c_\alpha + a_\alpha)$, soit :

$$c_\alpha = \frac{m^2 + n^2}{2n}, \qquad a_\alpha = \frac{m^2 - n^2}{2n}.$$

Ceci donne à une similitude près d'amplitude $4n^2$ la **formule d'Euclide** qui contruit une infinité de triangles pythagoriciens dont les côtés sont entiers :

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

La signification de cette égalité est donnée par la figure suivante, où l'arc CD est porté par le cercle centré en B de rayon BC, et $\tan(((\pi/2) - \alpha)/2) = (n/m)$:



Avec $n = 1$ on retrouve la formule de Pythagore que l'on a rappelée ci-dessus.

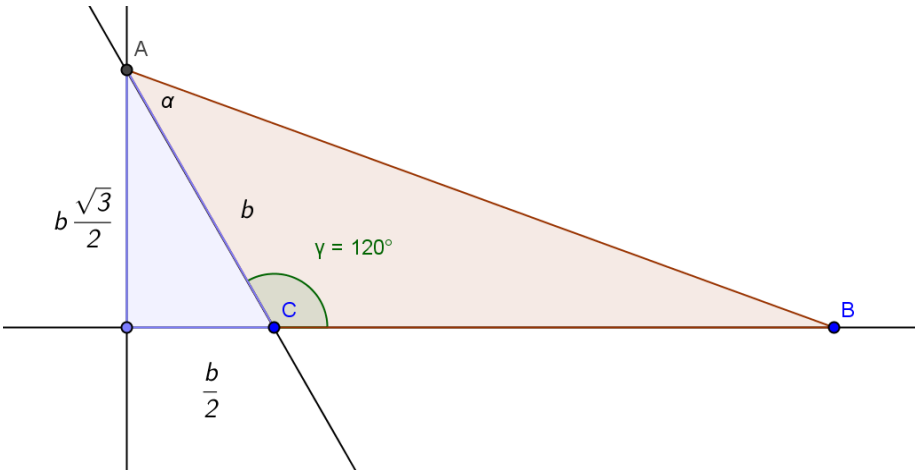
• Si $\gamma = (2\pi/3)$ angle de 120°, le triangle est tel que $\cos\gamma = -(1/2)$, et la formule d'Al-Kashi donne la relation :

$$c^2 = a^2 + ab + b^2.$$

Un triplet entier vérifiant cette expression est $(3, 5, 7)$ avec :

$$7^2 = 3^2 + (3 \times 5) + 5^2 = 9 + 15 + 25 = 49.$$

Il donne un triangle possèdant un angle de 120° et la corde à 16 noeuds permettant de tracer des angles à 60° ou 120°. On peut fabriquer une formule analogue à celle d'Euclide pour ce cas, en se ramenant à un triangle rectangle de côtés $(b\sqrt{3}/2)$, $(b/2) + a_\alpha$, et c_α. Ceci se fait en glissant près du côté b du triangle que l'on considère un demi-triangle équilatéral de coté b.



On a alors par le théorème de Pythagore :

$$c_\alpha^2 = \frac{3b^2}{4} + (\frac{b}{2} + a_\alpha)^2 = b^2 + a_\alpha b + a_\alpha^2.$$

On peut poser :

$$c_\alpha = \frac{m^2+n^2}{2n}, \qquad m = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{3m^2 - 2mn\sqrt{3} - 3n^2}{6n} = a_\alpha,$$

et vérifier que l'on a bien :

$$a_\alpha^2 + a_\alpha b + b^2 = \frac{3b^2}{4} + (\frac{b}{2} + a_\alpha)^2 = m^2 + (\frac{m^2-n^2}{2n})^2 = (\frac{m^2+n^2}{2n})^2.$$

Ceci donne une nouvelle formule analogue à celle d'Euclide, mais décrivant avec deux paramètres tous les triangles obtus possédant un angle $\gamma = 120°$:

$$\left(\frac{m^2+n^2}{2n}\right)^2 = (\frac{m^2 - \frac{2mn\sqrt{3}}{3} - n^2}{2n})^2 + (\frac{2m\sqrt{3}}{3})(\frac{m^2 - \frac{2mn\sqrt{3}}{3} - n^2}{2n}) + (\frac{2m\sqrt{3}}{3})^2.$$

• Pour tout γ, la formule d'Al-Kashi donne plus généralement une formule analogue à la précédente, et ceci à partir de la valeur prise par la **forme quadratique binaire définie** ψ :

$$\psi(a_\alpha, b) = a_\alpha^2 - 2(\cos\gamma)a_\alpha b + b^2 = b^2\sin^2\gamma + (a_\alpha - b\cos\gamma)^2 = c_\alpha^2.$$

En posant $C = \cot\gamma = (\cos\gamma/\sin\gamma)$ et :

$$c_\alpha = \frac{m^2+n^2}{2n},\ b\sin\gamma = m,\ a_\alpha - b\cos\gamma = \frac{m^2-n^2}{2n},\ a_\alpha = \frac{m^2+2Cmn-n^2}{2n},$$

on trouve l'expression suivante généralisant la formule d'Euclide :

$$(\frac{m^2+2Cmn-n^2}{2n})^2 - 2Cm(\frac{m^2+2Cmn-n^2}{2n})) + m^2(1+C^2) = (\frac{m^2+n^2}{2n})^2.$$

3. Des triangles pythagoriciens à la trigonométrie

On appelle **triangle pythagoricien** ou **triplet pythagoricien** tout triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs vérifiant :

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Si les nombres a, b, c, sont deux à deux premiers entre eux, on dit que le triangle est **primitif**. Le contexte géométrique qui a donné ci-dessus la formule d'Euclide, avec m et n entiers, permet de comprendre facilement pourquoi tout triangle pythagoricien est donné par cette formule ([**81**]) :

$$(2mn)^2 + (m^2-n^2)^2 = (m^2+n^2)^2.$$

On a évoqué précédemment un premier triangle pythagoricien $(3, 4, 5)$. Il met l'accent sur l'angle α_s associé, de **mesure** ${\alpha_s}^\circ$ en **degrés** ou α_s^ρ en **radians**, qui est tel que :

$${\alpha_s}^\circ = \frac{\alpha_s^\rho}{\pi} \times 180°,$$

et surtout :

$$\sin {\alpha_s}^\circ = \sin\alpha_s^\rho = \frac{3}{5} = 0,6 \qquad ; \qquad \cos {\alpha_s}^\circ = \cos\alpha_s^\rho = \frac{4}{5} = 0,8.$$

3.1. Premier exemple : On va voir comment le triplet pythagoricien $(3, 4, 5)$ permet de construire une table de trigonométrie. En représentant sur le cercle les angles multiples $q \times \alpha_s$ de l'angle α_s où q entier positif, et en identifiant les entiers q tels que $q \times {\alpha_s}^\circ$ soit proche d'un multiple p d'un angle droit (de $90°$) soit $p \times 90°$, on voit expérimentalement que la mesure ${\alpha_s}^\circ$ est proche de $(p/q) \times 90°$. Considérons par exemple :

$$17 \times {\alpha_s}^\circ \approx 7 \times 90°, \qquad {\alpha_s}^\circ \approx 37°.$$

La valeur $37°$ est approchée, et l'on a plus précisément :

$$(17 \times 37°) + 1° = 7 \times 90°.$$

Cet angle ${\alpha_s}^\circ \approx 37°$ permet de construire une **table de cordes**, c'est à dire une table de trigonométrie plane à valeurs approchées. Toutes les valeurs des sinus et cosinus sont rationnelles, les premières sont données par application des **formules de duplication**, celles de Carnot rappelées avant, complétées par :

$$\sin 2\alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha.$$

On peut ainsi par duplications successives calculer approximativement les valeurs :

$$\sin 37° \approx \frac{3}{5} = 0,6 \qquad , \qquad \cos 37° \approx \frac{4}{5} = 0,8.$$

$$\sin 74° \approx \frac{24}{25} = 0,96 \qquad , \qquad \cos 74° \approx \frac{7}{25} = 0,28.$$

$$\sin 148° \approx \frac{336}{625} = 0,5376 \qquad , \qquad \cos 148° \approx -\frac{527}{625} = -0,8432.$$

$$\sin 296° \approx -\frac{354144}{390625} \approx -0,9066 \qquad , \qquad \cos 296° \approx \frac{164833}{390625} \approx 0,4220.$$

La dernière duplication donne le sinus et le cosinus de l'angle $592° = 52° + 6 \times 90°$, d'où aussi :

$$\sin 52° \approx \frac{116\,749\,235\,904}{152\,587\,890\,625} \approx 0,76513\ ,\ \cos 52° \approx \frac{98\,248\,054\,847}{152\,587\,890\,625} \approx 0,64388.$$

Mais l'on peut comparer à l'autre angle du triangle de Pythagore initial :

$$\sin 53° \approx \frac{4}{5} = 0,8 \qquad , \qquad \cos 53° \approx \frac{3}{5} = 0,6 \qquad ,$$

pour calculer, avec $762\,939\,453\,125 = 5^{17}$:

$$\sin 1° \approx \frac{42\,744\,511\,676}{762\,939\,453\,125} \approx 0,0560\ ,\ \cos 1° \approx \frac{761\,741\,108\,157}{762\,939\,453\,125} \approx 0,9984\ .$$

On vérifie facilement que l'on a :

$$42\,744\,511\,676^2 + 761\,741\,108\,157^2 = 762\,939\,453\,125^2.$$

Avec les formules pour le développement de $\sin(\alpha \pm \beta)$ et $\cos(\alpha \pm \beta)$ on en déduit toutes les valeurs d'une table de trigonométrie dont les angles sont exprimés en degrés. Toutes les valeurs la constituant sont des nombres rationnels associés à des triplets d'entiers vérifiant la relation de Pythagore. Les hypoténuses des triangles pythagoriciens que l'on vient de construire sont toutes des puissances de 5, comme on le vérifie facilement. Par exemple avec l'angle de $148°$ les valeurs calculées donnent :

$$336^2 + 527^2 = 625^2 = 5^8.$$

Cette observation attire l'attention sur le fait que toutes les puissances de :

$$5 = (\sqrt{5})^2 = 2^2 + 1^2,$$

sont décomposables en somme de deux carrés, comme permet de l'établir par récurrence la relation :

$$(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2.$$

Elle dérive pour les modules de l'égalité valable avec des nombres complexes quelconques :

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Cette dernière s'écrit aussi avec module et argument :

$$\|x_1 + iy_1\| \exp(i\vartheta_1)\, \|x_2 + iy_2\| \exp(i\vartheta_2) = \|(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)\| \exp(i(\vartheta_1 + \vartheta_2)).$$

On retrouve en particulier :

$$5^2 = (2^2 + 1^2)(1^2 + 2^2) = 4^2 + 3^2.$$

Avec la formule d'Euclide ou directement on s'assure que $\sqrt{5}$ n'est pas un nombre rationnel (P/Q). La table de trigonométrie esquissée ci-dessus n'est pas d'une grande précision car on a fait une grosse approximation sur la mesure de l'angle α_s en arrondissant à ${\alpha_s}^\circ \approx 37^\circ$. Une table moderne donne plutôt ${\alpha_s}^\circ \approx 36,9^\circ$ et :

$$\sin 1^\circ \approx 0,01745\ ,\ \cos 1^\circ \approx 0,99985.$$

De sorte qu'améliorer la connaissance de la mesure de l'angle α_s constitue un objectif essentiel si l'on veut construire une meilleure table de trigonométrie à partir du procédé que l'on vient de présenter. On voit que l'erreur que l'on a faite sur ces dernières valeurs est importante, pratiquement de l'ordre de 5×10^{-2}.

3.2. Mesure de l'angle α_s. On imagine que l'on peut mieux approcher la mesure de l'angle α_s du triangle de Pythagore $(3, 4, 5)$ en augmentant le dénominateur q de la fraction permettant d'approcher ${\alpha_s}^\circ$, évidemment à la précision près du dispositif expérimental. Tout revient à s'intéresser aux nombres entiers p et q tels que pour $\varepsilon^\circ > 0$ petit on ait :

$$|q \times {\alpha_s}^\circ - p \times 90^\circ| \leq \varepsilon^\circ.$$

Si le nombre $({\alpha_s}^\circ/90^\circ)$ était rationnel et valait (p/q) irréductible, on aurait :

$$\exp(i\frac{\pi}{2} \times \frac{p}{q}) = \exp(i\alpha_s^\rho) = \frac{4 + 3i}{5}, \qquad (4 + 3i)^q = 5^q(i)^p \in \mathbb{C}.$$

Il suffit de considérer la dernière égalité dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ pour établir qu'elle ne peut être assurée (voir par exemple ([**46**])). Trouver une démonstration à portée des anciens de cette impossibilité est un problème intéressant. Il résulte de cette impossibilité que l'on a affaire à un nombre $({\alpha_s}^\circ/90^\circ) = (2\alpha_s^\rho/\pi)$ qui est un **irrationnel**, et qui peut donc être développé en une fraction continue aussi longue que souhaité ([**52**]). Ceci permet bien de trouver une infinité de nombres rationnels (p_n/q_n), meilleures approximations de $({\alpha_s}^\circ/90^\circ)$ telles que l'on ait avec $0 < {\varepsilon_n}^\circ < 90^\circ/q_n$ aussi petit que l'on veut :

$$\left|\frac{{\alpha_s}^\circ}{90^\circ} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{{\varepsilon_n}^\circ}{90^\circ} \times \frac{1}{q_n} < \frac{1}{q_n^2}.$$

On peut aussi écrire en degrés :

$$(\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ) - \frac{90^\circ}{q_n^2} < {\alpha_s}^\circ \approx \frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ < (\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ) + \frac{90^\circ}{q_n^2}.$$

Ceci permet d'appliquer la formule de soustraction :

$$\begin{aligned} & \sin({\alpha_s}^\circ) - \sin(\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ) \\ = \quad & \sin(\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ)(\cos(\frac{{\varepsilon_n}^\circ}{q_n}) - 1) \pm \sin(\frac{{\varepsilon_n}^\circ}{q_n}) \cos(\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ). \end{aligned}$$

Mais un argument géomérique évident sur des surfaces montre que pour tout angle $\vartheta > 0$ petit exprimé en degrés :

$$\sin \vartheta^\circ < \pi \times \frac{\vartheta^\circ}{180^\circ} < \frac{\sin \vartheta^\circ}{\cos \vartheta^\circ}.$$

Il en résulte par des manipulations évidentes la majoration suivante :

$$\left| \sin({\alpha_s}^\circ) - \sin(\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ) \right| < \left| \sin(\frac{\pi}{2q_n^2}) \right| + 2 \left| \sin(\frac{\pi}{2q_n^2}) \right|^2.$$

Ceci permet de garantir que pour n assez grand on a :

$$\left| \sin({\alpha_s}^\circ) - \sin(\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ) \right| < \frac{\pi}{q_n^2}.$$

Ce résultat montre que par la construction très simple précédente comparant les angles multiples de l'angle α_s du triangle de Pythagore aux angles multiples d'un angle droit, on peut mesurer l'angle α_s donnant $\sin({\alpha_s}^\circ) = (3/5)$, c'est à dire approcher d'aussi près que l'on veut la valeur ${\alpha_s}^\circ$ et ceci à la précision près du dispositif expérimental de mesure de l'angle α_s qui impose évidemment une limitation. En radians on a :

$$(\frac{p_n}{q_n}) - \frac{1}{q_n^2} < \frac{\alpha_s^\rho}{2} \times \frac{4}{\pi} \approx \frac{p_n}{q_n} < (\frac{p_n}{q_n}) + \frac{1}{q_n^2}.$$

Cette approche par les fractions continues rappelle une formule remarquable due au Vicomte William Brouncker, l'un des fondateurs de la Société Royale de Londres :

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \cfrac{11^2}{2 + \dots}}}}}}$$

3.3. Table de trigonométrie pythagoricienne. On cherche à procéder comme avant, mais en utilisant une approximation plus précise de l'angle α_s correspondant au triangle sacré $(3, 4, 5)$ fabriquée comme décrit précédemment :

$${\alpha_s}^\circ \approx \frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ.$$

En notant pour tout angle α :

$$\sin(\alpha^\circ) = \mathbf{s}, \qquad \cos(\alpha^\circ) = \mathbf{c},$$

on pense à faire appel à la formule de De Moivre où t entier :

$$\cos(t\alpha^\circ) + i \sin(t\alpha^\circ) = (\mathbf{c} + i\mathbf{s})^t = \sum_{k=0,\dots,t} \binom{t}{k} (i)^k \mathbf{c}^{t-k} \mathbf{s}^k.$$

Ceci donne deux expressions polynomiales (la première correspondant aux polynômes de Tchebychev T_t) :

$$\cos(t\alpha^\circ) = C_t(\mathbf{c},\mathbf{s}) = T_t(\mathbf{c}) = \sum_{k=0,\dots,E(\frac{t}{2})} \binom{t}{2k}(-1)^k \mathbf{c}^{t-2k}(1-\mathbf{c}^2)^k,$$

$$\sin(t\alpha^\circ) = S_t(\mathbf{c},\mathbf{s}) = \sum_{k=0,\dots,E(\frac{t-1}{2})} \binom{t}{2k+1}(-1)^k \mathbf{c}^{t-2k-1}\mathbf{s}^{2k+1}.$$

En particulier si $\mathbf{c}$ et $\mathbf{s}$ sont rationnels on en déduit des expressions rationnelles pour $\cos(t\alpha^\circ)$ et $\sin(t\alpha^\circ)$.

• Cherchons alors des valeurs entières t_1 et t_2 telles que :

$$1^\circ \approx t_2(90^\circ - {\alpha_s}^\circ) - t_1{\alpha_s}^\circ = t_2 90^\circ - (t_1+t_2){\alpha_s}^\circ \approx \frac{(q_n-p_n)t_2-(p_n)t_1}{q_n}90\times 1^\circ,$$

c'est à dire vérifiant :

$$q_n(90t_2-1) = p_n 90(t_1+t_2).$$

Une telle équation en nombres entiers impose que 90 divise q_n, et puisque p_n et q_n sont premiers entre eux, p_n et $(q_n/90)$ sont premiers entre eux. Ceci permet de trouver λ et t_2, t_1 vérifiant :

$$t_2 = \frac{\lambda p_n + 1}{90}, \qquad t_1 = \frac{\lambda(q_n-p_n)-1}{90} = \lambda\frac{q_n}{90} - t_2.$$

Si l'on peut calculer ces nombres, on peut déduire des valeurs approchées de $\sin 1^\circ$ et $\cos 1^\circ$ à partir de $\sin(t_1+t_2){\alpha_s}^\circ$ et $\cos(t_1+t_2){\alpha_s}^\circ$. Or ces derniers nombres sont donnés par les expressions polynomiales précédentes avec :

$$\sin({\alpha_s}^\circ) = \mathbf{s} = (3/5), \qquad \cos({\alpha_s}^\circ) = \mathbf{c} = (4/5).$$

• Sur notre premier exemple, on a utilisé ${\alpha_s}^\circ \approx 37^\circ = (37/90)\times 90^\circ$, soit $p_n = 37$ et $q_n = 90$. Avec l'égalité $(17\times 37)+1 = 7\times 90$, ce cas correspond à $\lambda = 17$ et $t_2 = 7$, $t_1 = 10$. Ceci donne :

$$1^\circ = 7\times 90^\circ - 17\times 37^\circ \equiv 270^\circ - (2^4+1)\times 37^\circ \equiv 53^\circ - 52^\circ \mod 360^\circ.$$

On en a déduit avant $\sin 1^\circ$ et $\cos 1^\circ$ en utilisant les formules de duplication pour déduire $\sin 52^\circ$ et $\cos 52^\circ$, et les formules d'addition avec $\sin 53^\circ$ et $\cos 53^\circ$. Mais on peut utiliser plus directement les expressions polynomiales issues de la formule de De Moivre pour obtenir les mêmes valeurs approchées :

$$\sin 1^\circ \approx -\cos(17\times 37^\circ) = -\frac{1}{5^{17}}\sum_{k=0,\dots,8}(-1)^k\binom{17}{2k+1}4^{16-2k}3^{2k+1},$$

$$\cos 1^\circ \approx -\sin(17\times 37^\circ) = -\frac{1}{5^{17}}\sum_{k=0,\dots,8}(-1)^k\binom{17}{2k}(-1)^k 4^{17-2k}3^{2k}.$$

• Si l'on considère maintenant une valeur plus précise :

$${\alpha_s}^\circ = \frac{p_n}{q_n}\times 90^\circ = \frac{64350110873}{157079632680}\times 90^\circ \approx 36,87^\circ.$$

Elle permet d'identifier λ et t_2 tels que :

$$90\times t_2 = \lambda\times 64350110873 + 1.$$

Ceci se fait avec :

$$\frac{64\,350\,110\,873}{90} = 715001231 + \frac{1}{1+\frac{1}{11+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}}},\ 715001231 + \frac{1}{1+\frac{1}{11+\frac{1}{1}}} = \frac{9295\,016\,015}{13},$$

qui donnent :

$$\lambda = 13, \qquad t_2 = 9295\,016\,015, \qquad t_1 = 13\,394\,264\,261.$$

Ces valeurs fournissent modulo 360° :

$$\begin{aligned} & (9295\,016\,015 \times (90^\circ - {\alpha_s}^\circ)) - (13\,394\,264\,261 \times {\alpha_s}^\circ) \\ \equiv\ & 270^\circ - (22\,689\,280\,276 \times {\alpha_s}^\circ) \qquad \bmod 360^\circ, \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} 22\,689\,280\,276 \times {\alpha_s}^\circ &\approx 22\,689\,280\,276 \times \frac{64350110873}{157079632680} \times 90^\circ \\ &= 836\,551\,441\,349 \times 1^\circ \\ &= 2323754003 \times 360^\circ + 269^\circ \\ &\equiv 269^\circ \qquad \bmod 360^\circ, \end{aligned}$$

soit :

$$(9295\,016\,015 \times (90^\circ - {\alpha_s}^\circ)) - (13\,394\,264\,261 \times {\alpha_s}^\circ) \equiv 1^\circ \qquad \bmod 360^\circ.$$

On en déduit facilement :

$$\sin(1^\circ) \approx -(\frac{4}{5})^{22\,689\,280\,276} \sum_{k=0,\ldots,11\,344\,640\,138} (-1)^k \binom{22\,689\,280\,276}{2k} (\frac{3}{4})^{2k},$$

$$\cos(1^\circ) \approx -(\frac{4}{5})^{22\,689\,280\,276} \sum_{k=0,\ldots,11\,344\,640\,1387} (-1)^k \binom{22\,689\,280\,276}{2k+1} (\frac{3}{4})^{2k+1}.$$

Avec la formule d'addition, on déduit des expressions analogues pour les nombres $\sin(n^\circ)$ et $\cos(n^\circ)$ où n est un entier compris entre 1 et 90. Les dénominateurs des rationnels obtenus avant sont des puissances de 5. En multipliant numérateurs et dénominateurs par des puissances de 2 ad'hoc, on obtient des valeurs décimales pour les sinus et cosinus considérés. Remarquons que le calcul effectif des valeurs données ici pour $\sin(1^\circ)$ et $\cos(1^\circ)$ est une tâche ardue, même si l'on utilise les formules de duplication avec :

$$22\,689\,280\,276 = 2^{34}+2^{32}+2^{30}+2^{27}+2^{22}+2^{21}+2^{17}+2^{15}+2^{14}+2^{13}+2^{12}+2^{8}+2^{4}+2^{2}.$$

Les rationnels $\sin(1^\circ)$ et $\cos(1^\circ)$ donnent un triangle pythagoricien avec lequel on peut calculer d'autres triangles correspondant chacun à une ligne d'une table :

$$\sin n^\circ \approx \frac{a_n}{c_n}, \qquad \cos n^\circ \approx \frac{b_n}{c_n}, \qquad a_n^2 + b_n^2 = c_n^2.$$

On dit qu'une **table de trigonométrie pythagoricienne** est une table dont chaque ligne donne quatre valeurs : une évaluation d'un angle (plutôt en degrés et par exemple toutes les valeurs $(n/2)^\circ$, avec n de 1 à 180 comme dans la table de Ptolémée [**72**]), le numérateur a_n de son sinus mis sous forme de fraction rationnelle (a_n/c_n), le numérateur b_n de son cosinus mis de même sous forme rationnelle (b_n/c_n), la valeur c_n correspondant au triangle pythagoricien (a_n, b_n, c_n). Pour commodité, on peut ajouter les valeurs décimales des sinus et cosinus avec une même précision à afficher. Remarquons ici que le processus que l'on vient de

suivre pour construire une telle table de trigonométrie part du seul triplet $(3, 4, 5)$. Par ailleurs, comme le montre la consultation de [**14**], il n'existe pas de telle table pythagoricienne en dehors d'une tablette babylonienne sur laquelle on va revenir.

3.4. Compléments sur la méthode. Puisque l'on a utilisé le formalisme des fractions continues, p_n et q_n sont premiers entre eux et augmentent indéfiniment lorsque n augmente. Dans ces conditions (p_n/q_n) devient de plus en plus proche du nombre $({\alpha_s}^\circ/90^\circ)$. Généralisant ce qui précède, on pose :

$$1^\circ \approx \frac{q_n}{p_n \times 90} \times {\alpha_s}^\circ = \frac{q_n}{p_n \times 2 \times 3^2 \times 5} \times {\alpha_s}^\circ = 1^\circ \pm \frac{{\varepsilon_n}^\circ}{p_n}, \qquad 0 < {\varepsilon_n}^\circ < \frac{90^\circ}{q_n}.$$

Si l'on écrit, avec une valeur entière j éventuellement égale à 1 comme avant :

$$t_2(90^\circ - {\alpha_s}^\circ) - t_1{\alpha_s}^\circ \approx j^\circ \approx \frac{jq_n}{p_n \times 90} \times {\alpha_s}^\circ,$$

soit :

$$p_n \times 90(t_1 + t_2) = q_n(90t_2 - j), \qquad 90(t_1 + t_2) = \lambda_1 q_n, \qquad 90t_2 - \lambda_1 p_n = j.$$

La plus grand diviseur commun à 90 et p_n divise j, et si on le note δ, il reste :

$$\left(\frac{90}{\delta}\right)(t_1 + t_2) = \lambda q_n, \qquad \left(\frac{90}{\delta}\right) t_2 - \lambda p_n = \left(\frac{j}{\delta}\right).$$

Dans la dernière équation le plus grand diviseur commun à $(90/\delta)$ et p_n est noté δ', il divise (j/δ). On peut faire en sorte d'avoir $j = \delta\delta'$ et identifier λ et t_2 vérifiant la dernière équation. En remplaçant dans la précédente on obtient t_1. Tout notre problème se réduit à calculer une fraction continue de $(p_n\delta/90)$ pour en déduire les nombres possibles λ, t_1, t_2 à un paramètre près, qui résolvent les équations diophantiennes rencontrées. Il vient alors :

$$(\delta\delta')^\circ \approx t_2 \times 90^\circ - (t_1 + t_2) \times {\alpha_s}^\circ \qquad \bmod 360^\circ.$$

Selon la valeur de t_2 modulo 4, on déduit $\sin((\delta\delta')^\circ)$ et $\cos((\delta\delta')^\circ)$ grâce aux expressions de $\sin((t_1+t_2)\times{\alpha_s}^\circ)$ et de $\cos((t_1+t_2)\times{\alpha_s}^\circ)$. Si $\delta\delta' = 1$ on évalue ainsi $\sin(1^\circ)$ et $\cos(1^\circ)$. Dans bien des cas cependant : $\delta\delta' \neq 1$.

• On peut faire le même calcul en remplaçant les degrés par des minutes, il suffit de remplacer 90 par 5400. Oubliant les fractions continues, on peut faire que q_n soit une puissance de 2, par exemple :

$$\alpha^\circ \approx \frac{7}{17} \times 90^\circ \approx \frac{26\,985}{2^{16}} \times 90^\circ = 37,058^\circ.$$

On a alors $\delta\delta' \neq 1$ ainsi que :

$$2^{15} \times \alpha^\circ = 32768 \times \alpha^\circ \approx (13492 \times 90^\circ) + 45^\circ \equiv 45^\circ \qquad \bmod 360^\circ,$$

et les expressions calculables par les formules de duplication pour $2^{15} \times \alpha^\circ$:

$$\sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx (\frac{1}{5})^{32768} \sum_{k=0,\ldots,16384} (-1)^k \binom{32768}{2k} (3)^{2k} (4)^{32768-2k},$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx (\frac{1}{5})^{32768} \sum_{k=0,\ldots,16383} (-1)^k \binom{32768}{2k+1} (3)^{2k+1} (4)^{32768-2k-1}.$$

• Une table de trigonométrie moderne donne les valeurs suivantes coïncidant à 5×10^{-3} près avec la valeur $0,6$:

$$\sin 36,8^\circ = 0,59902 < \sin 36,9^\circ = 0,60042 < \sin 37^\circ < \sin 37,1^\circ = 0,60320.$$

Si on part ici d'une meilleure approximation de la mesure de l'angle α :

$$\alpha^\circ \approx 36,87^\circ \approx \frac{161}{393} \times 90^\circ = \frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ = \frac{4830}{131} \times 1^\circ,$$

on a :

$$\delta = \gcd(90, p_n) = 1 = \delta' = j = 1.$$

On doit alors résoudre l'équation :

$$\left(\frac{90}{\delta\delta'}\right) t_2 - \lambda \left(\frac{p_n}{\delta'}\right) = 90t_2 - 161\lambda = \left(\frac{j}{\delta\delta'}\right) = 1.$$

Ceci permet de trouver $\lambda = 19$ et $t_2 = 34$, et pour t_1 :

$$30(t_1 + 34) = 19 \times 131, \qquad t_1 = \frac{2489}{30} - 34 = \frac{1469}{30} = 48,9666...$$

Il est difficile d'aller plus loin ainsi. On est encombré par le fait que $q_n = 393$ n'est pas multiple de $(90/\delta) = 90$. Si tel était le cas en effet, on trouverait t_1 entier.

Une façon de corriger la situation consiste, au lieu de considérer (p_n/q_n) approximation de $({\alpha_s}^\circ/90^\circ)$, à se rabattre sur (r_n/s_n) approximation de 90θ, nombre qui est comme $({\alpha_s}^\circ/90^\circ)$ irrationnel. Avec l'exemple précédent :

$$\frac{p_n}{q_n} \times 90^\circ = \frac{161}{393} \times 90^\circ = \frac{4830}{131} \times 1^\circ = (36 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}}) \times 1^\circ = \frac{r_n}{s_n} \times 1^\circ.$$

On reprend le calcul avec une valeur entière j vérifiant :

$$t_2(90^\circ - {\alpha_s}^\circ) - t_1{\alpha_s}^\circ \approx j^\circ \approx \frac{js_n}{r_n} \times {\alpha_s}^\circ.$$

Il vient, en commençant par regarder ce que divise s_n qui par construction est premier à r_n :

$$(t_2 90 - j)s_n = r_n(t_1 + t_2), \qquad (t_1 + t_2) = \lambda s_n, \qquad 90t_2 - \lambda r_n = j.$$

La plus grand diviseur commun à 90 et r_n divise j, et donc reste assez petit. Le notant δ" on pose $j = \delta$", et on a en remarquant que s_n premier à $(r_n/\delta")$:

$$(t_1 + t_2) = \lambda s_n, \qquad 90t_2 - \lambda r_n = \delta".$$

Notre problème revient à calculer une fraction continue de $(r_n/90)$ pour en déduire les nombres possibles λ, t_2, et cette fois t_1 entier qui résolvent les équations diophantiennes rencontrées. Il vient :

$$(\delta")^\circ \approx t_2 \times 90^\circ - (t_1 + t_2) \times {\alpha_s}^\circ \qquad \bmod 360^\circ.$$

Comme précédemment, selon la valeur de t_2 modulo 4, on déduit $\sin((\delta")^\circ)$ et $\cos((\delta")^\circ)$. Si $\delta" = j = 1$ on obtient des valeurs approchées de $\sin(1^\circ)$ et $\cos(1^\circ)$. Mais le nombre $\delta" = \gcd(90, r_n)$ peut être très différent de 1.

Sur notre dernier exemple, on a $r_n = 4830$ et $\delta" = 30$. Les calculs donnent $t_2 = 54$ et $\lambda = 1$, et avec $s_n = 131$ on obtient $t_1 = 77$, soit :

$$30^\circ \approx 54 \times 90^\circ - 131 \times {\alpha_s}^\circ \equiv 180^\circ - (2^7 + 2 + 1) \times {\alpha_s}^\circ \qquad \bmod 360^\circ.$$

D'où des expressions calculables par les formules de duplication et d'addition :

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \approx \frac{1}{5^{131}} \sum_{k=0,\ldots,65} (-1)^k \binom{131}{2k+1} (3)^{2k+1} (4)^{(131-2k-1)},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -\frac{1}{5^{131}} \sum_{k=0,\ldots,65} (-1)^k \binom{131}{2k} (3)^{2k} (4)^{(131-2k)}.$$

- Considérons une meilleure valeur approchée de la mesure de l'angle α :

$$\alpha^\circ \approx 36,867^\circ \approx \frac{553}{15} \times 1^\circ = (36 + \frac{1}{1+\frac{1}{6+\frac{1}{2}}}) \times 1^\circ = \frac{r_n}{s_n} \times 1^\circ.$$

Ce choix donne $r_n = 553$ et $\delta" = \gcd(90, 553) = 1$. Il mène à l'équation $90t_2 - \lambda r_n = 1$ qui conduit à :

$$t_2 = 510,\ \lambda = 83,\ (t_1 + t_2) = \lambda s_n = 83 \times 15 = 1245,$$

et :

$$1^\circ \approx 510 \times 90^\circ - (1245) \times {\alpha_s}^\circ \equiv 180^\circ - (2^{10} + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1) \times {\alpha_s}^\circ \mod 360^\circ.$$

On obtient ainsi de nouvelles expressions, calculables aussi par les formules de duplication et d'addition :

$$\sin 1^\circ \approx \sin((1245) \times {\alpha_s}^\circ) = \frac{1}{5^{1245}} \sum_{k=0,\ldots,622} (-1)^k \binom{1245}{2k+1} (3)^{2k+1} (4)^{(1245-2k-1)},$$

$$\cos 1^\circ \approx -\cos(1245 \times {\alpha_s}^\circ) = \frac{1}{5^{1245}} \sum_{k=0,\ldots,622} (-1)^k \binom{1245}{2k} (3)^{2k}, (4)^{(11245-2k)}.$$

4. Anticythère

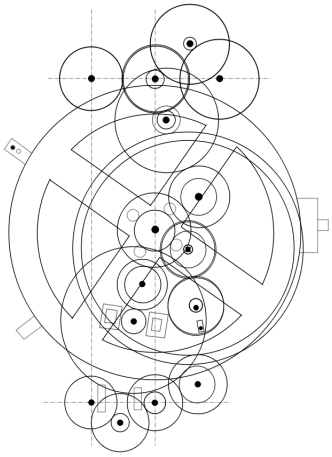
Un mécanisme a été découvert au début du vingtième siècle lors de fouilles organisées sur l'épave d'un navire romain qui sombra au large de l'ile d'Anticythère vers 50 avant Jésus Christ. Après de nombreux travaux destinés à comprendre comment organiser le puzzle des 82 pièces retrouvées, les archéologues ont fini par se mettre d'accord sur le fait qu'il s'agit des restes d'un calculateur astronomique portable, peut être construit par Poseidonios de Rhodes, ou par Archimède. Il existe des témoignages de Cicéron ([**36**]) qui évoquent de telles machines. L'une d'elles aurait été ramenée à Rome par le général romain Marcus Claudius Marcellus qui prit la ville de Syracuse en 212 avant Jésus Christ. Au cours de cet évènement Archimède perdit la vie et ses biens auraient fait partie du butin du vainqueur. Cette machine permettait de prévoir la position du Soleil, de la Lune, et des cinq planètes connues dans l'Antiquité. Il donnait les dates prévisibles des éclipses, et les dates des jeux pan-hélléniques. En voici une photo due au Musée Archéologique

National d'Athènes ([**45**]) :

Il ne lui manquait pour devenir une horloge qu'une source interne d'énergie motrice (un poids, un ressort ou un moteur électrique), la seule force humaine appliquée sur une manivelle faisant tourner ses rouages. Mais surtout un dispositif d'échappement permet dans une horloge l'entretien d'un mouvement périodique régulé par un pendule ou un balancier [**84**]. A l'intérieur de la machine d'Anticythère existe une vingtaine de roues dentées, dont semble-t-il une roue dentée à 64 dents, engrenée sur une roue dentée à 38 dents couplée à une roue à 48 dents, engrenée elle-même sur une roue à 24 dents couplée sur une roue à 127 dents, cette dernière engrenée sur une roue à 32 dents,... Ceci construit un rapport caractéristique de la Lune : 235 mois lunaires synodiques, c'est à dire séparant deux lunaisons successives par rapport à la Terre (un mois lunaire sidéral) complété d'un temps de reprise de sa position par rapport au soleil, composent un cycle de Méton de 19 années tropiques (ou années solaires), soit 6940 jours :

$$\frac{64}{38} \times \frac{48}{24} \times \frac{127}{32} = \frac{254}{19} = \frac{235}{19} + 1 \approx 13,36842.$$

"La découverte du cycle de Méton fut publiée en l'an 433, au siècle de Périclès, à l'occasion des jeux olympiques. Les Athéniens émerveillés, dit-on, firent graver en lettres d'or le cycle de Méton sur les colonnes du temple de Minerve et le rang d'une année dans le cycle prit le nom de **nombre d'or**" ([**39**] p. 70). On trouve sur Wikipédia une image libre de droit, inspirée de [**71**], donnant une description de l'organisation interne des rouages de la machine d'Anticythère :



Il est plus compliqué de construire une machine à calculer comme la Pascaline que de construire une horloge, sans doute parce qu'il est nécessaire d'articuler plus de rouages dans un tel calculateur que dans une horloge. Ce que laisse imaginer l'évocation du mécanisme d'Anticythère est que les grecs savaient construire de bons engrenages, par exemple cemui dont l'une des roues possède 38 dents. Il savaient donc diviser un angle de 360° en un nombre entier d'angles égaux, ce qui n'est pas directement évident. Bien sûr pour 38 dents une valeur approchée est :

$$\frac{1}{38} \times 360° = \frac{1}{19} \times 180° = 9,47368°$$

Mais comment construire une telle roue dentée, avec des dents pouvant être au départ des triangles équilatéraux de base identique ? L'idée de l'engrenage est de faire rouler sans glissement un cercle de rayon r sur un autre cercle de rayon R. Le périmètre du premier cercle vaut en $2\pi r$ et trace en un tour sur l'autre cercle un arc d'angle α tel que :

$$\alpha^\rho = \frac{2\pi r}{R}, \qquad \alpha^\circ = \frac{r}{R} \times 360°.$$

Si l'on veut diviser un cercle en 38 secteurs égaux, il suffit donc de choisir $R = 38r$, ce qui peut être construit avec le théorème de Thalès. Ceci donne un angle valant en degrés :

$$\alpha^\circ = \frac{1}{38} \times 360° \approx 9,47368°$$

Le procédé permettant de faire rouler sans frottement un cercle sur un autre (ce que permet l'engrenage - voir [**84**]), joint au couplage solidaire de roues sur de mêmes axes qui réalise l'opération de multiplication, permet de fabriquer tous les ratios de cycles souhaités, aussi compliqués soient-ils. Les anciens avaient mis en oeuvre cette idée pour contruire la machine d'Anticythère, il est probable qu'ils s'en sont servi pour mieux connaitre les angles, leur division, et la trigonométrie associée. En d'autres termes, ils n'ont pas considéré que des constructions faites avec la **règle** et le **compas** : ils ont ajouté aussi la **roulette** sans frottement d'un cercle de rayon R sur un autre de rayon r, c'est à dire la considération des **épicycloïdes** ($\varepsilon = +1$) et des **hypocycloïdes** ($\varepsilon = +1$) d'équation paramétrique en ρ et θ :

$$x(\theta) = \rho((1 + \varepsilon\frac{R}{r})\cos\theta - \varepsilon\cos(1 + \varepsilon\frac{R}{r})\theta),$$

$$y(\theta) = \rho((1 + \varepsilon\frac{R}{r})\sin\theta - \varepsilon\sin(1 + \varepsilon\frac{R}{r})\theta).$$

Une réalisation moderne d'une telle roulette est le spirographe (©Hasbro). La géométrie élaborée avec ces trois outils, la règle, le compas et le roulette, est plus vaste que celle qui est engendrée par l'utilisation seule des deux premiers. Elle peut permettre par exemple la trisection des angles selon les caractéristiques de la roulette que l'on considère (diamètres des roues, rapport R/r, etc.), voire le découpage d'un angle en un plus grand nombre d'angles égaux.

5. Formes des triangles pythagoriciens

Deux triangles pythagoriciens (a, b, c) et $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ où λ est un nombre entiers sont dits avoir même **forme**. On a donc une relation d'équivalence entre ces triangles, et l'on peut dire que chaque forme de triangle pythagoricien contient un unique triangle primitif au sens où on l'a défini ci-dessus. On peut étendre cette

notion en considérant également que les deux triangles (a, b, c) et (b, a, c) sont de même forme. On caractérise alors le forme par un triangle pythagoricien primitif (a, b, c) tel que $a < b$. Le cas $a = b$ est impossible puisque l'on doit avoir a, b, c entiers et que l'on peut établir que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. On peut aussi caractériser la forme du triangle pythagoricien par l'angle α du triangle mesuré en degré, ou aussi sa tangente, qui est telle que :

$$\tan(\alpha^\circ) = \frac{a}{b}, \qquad 0^\circ < \alpha^\circ < 45^\circ.$$

Si l'on considère ce que l'on a exposé ci-dessus, on introduit naturellement comme le fait [**79**] l'ensemble S de tous les angles donnés par un triangle pythagoricien. Et le résultat que l'on peut énoncer est que pour tout angle θ de mesure en degré valant θ° et pour tout $\varepsilon^\circ > 0$ petit, on peut trouver α° correspondant à un triangle pythagoricien tel que :

$$|\theta^\circ - \alpha^\circ| \leq \varepsilon^\circ.$$

Présenté autrement, en radians, on peut dire que S est dense dans le segment $[0, \frac{\pi}{4}]$. La démonstration donnée dans [**79**] est élémentaire. Elle consiste à utiliser d'une certaine façon la formule d'Euclide avec :

$$a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2.$$

En posant $r = (m/n)$, on obtient :

$$\tan(\alpha^\circ) = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}(\frac{m}{n} - \frac{n}{m}) = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}).$$

Ceci donne :

$$r = \frac{m}{n} = \tan(\alpha^\circ) + \sqrt{1 + \tan(\alpha^\circ)^2} = \tan(\alpha^\circ) + \frac{1}{\cos(\alpha^\circ)} = \tan(\alpha^\circ) + \sec(\alpha^\circ).$$

- En notant alors dans le cas le plus général pour l'angle θ :

$$r = \tan(\theta^\circ) + \sqrt{1 + \tan(\theta^\circ)^2},$$

- ou bien le nombre r est rationnel et s'écrit (m/n) avec deux entiers m et n, alors en faisant le calcul inverse :

$$\theta \in S.$$

- ou bien le nombre r est irrationnel, et il peut être approché d'aussi près que souhaité par une suite de rationnels :

$$r_1 = \frac{m_1}{n_1}, r_2 = \frac{m_2}{n_2}, r_3 = \frac{m_3}{n_3}, ...$$

Chacun de ces rationnels r_i définit un triplet pythagoricien :

$$(a_i, b_i, c_i) = (m_i^2 - n_i^2, 2m_i n_i, m_i^2 + n_i^2)$$

dont la forme est telle que :

$$\tan({\alpha_i}^\circ) = \frac{1}{2}(\frac{m_i}{n_i} - \frac{n_i}{m_i}) = \frac{1}{2}(r_i - \frac{1}{r_i}) \longrightarrow \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) = \tan(\theta^\circ).$$

La continuité de la fonction tan garantit que la suite des angles α_i converge vers θ, et est donc telle qu'à partir d'un certain indice i_n on a pour tout $i > i_n$ l'inégalité :

$$|\theta^\circ - {\alpha_i}^\circ| \leq \varepsilon^\circ.$$

Ce résultat justifie a posteriori la démarche que l'on a eue précédemment, et mieux il la systématise d'une certaine façon.

• Avec le triangle $(3, 4, 5)$, on a :

$$r = \tan(\alpha_s{}^\circ) + \sqrt{1 + \tan(\alpha_s{}^\circ)^2} = \frac{3}{4} + \sqrt{1 + \frac{3^2}{4^2}} = \frac{3+5}{4} = 2 = \frac{2}{1} = \frac{m_s}{n_s}.$$

Plus généralement, avec $r = \frac{m}{n}$ rationnel :

$$r = \tan(\theta^\circ) + \sqrt{1 + \tan(\theta^\circ)^2} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) = \tan(\theta^\circ) = \frac{m^2 - n^2}{2mn}.$$

Comme on l'a vu, on est dans S, et on retrouve seulement la formule d'Euclide.

• Avec l'angle θ de mesure $\theta^\circ = 1^\circ$, en partant de [**30**] :

$$r = \frac{1017452406437284}{999847695156391} = 1 + \cfrac{1}{56 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{42+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{85+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}}}}}}}}}}}}},$$

$$r = [1, 56, 1, 3, 1, 6, 4, 42, 1, 1, 18, 1, 85, 1, 11, 1, 5, 2, 3, 3, 56, 2, 1, 2].$$

On dispose donc d'une fraction continue qui donne de bonnes possibilités d'approcher u au mieux par un nombre rationnel :

$$r_2 = \frac{57}{56},\ r_3 = \frac{58}{57},\ r_4 = \frac{231}{227},\ r_5 = \frac{289}{284},\ r_5 = \frac{1965}{1931},\ r_6 = \frac{8149}{8008},\ r_7 = \frac{344223}{338267}, \dots$$

Avec r_5 on trouve à un facteur 2 près le triangle de Pythagore primitif :

$$a = 66232, \qquad b = 3794415, \qquad c = 3794993.$$

Il donne à une précision de 8×10^{-8} près :

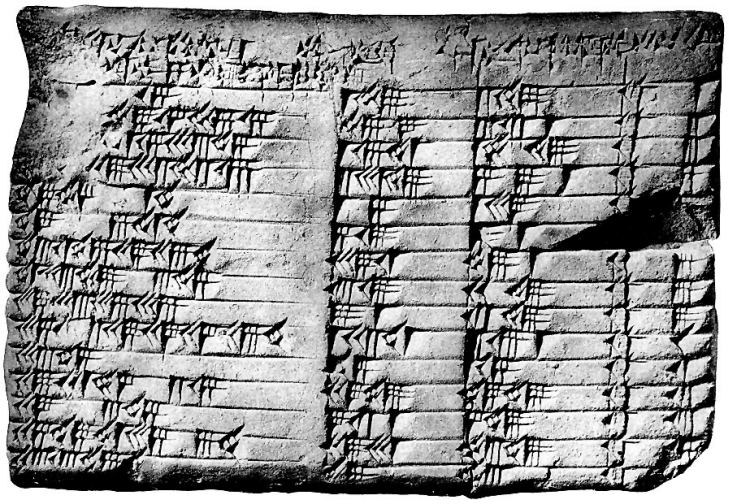
$$\sin 1^\circ = \frac{66232}{3794993} \approx 0,01745247, \qquad \cos 1^\circ = \frac{3794415}{3794993} \approx 0,999847694.$$

On pourrait avoir une précision bien meilleure si on le souhaitait, en prenant une réduite plus proche de r. On vient donc en réalité de construire un méthode qui permet de déduire de toute table de trigonométrie classique une table de trigonométrie pythagoricienne de même précision. Inversement, par de simples divisions, une table de trigonométrie pythagoricienne redonne une table classique. Les deux sont équivalentes. Pour les calculs de précision d'une table pythagoricienne, on renvoie à l'article de W. S. Anglin ([**16**]).

6. Plimpton 322,

La tablette babylonienne n°322 de la collection de G. A. Plimpton détenue à l'Université Columbia de New York vient de Larsa et date de 1800 avant J. C. ([**63**],

[**77**]), c'est à dire de plus de 1000 ans avant la naissance de Pythagore :



C'est un étrange document qui liste quinze triplets pythagoriciens qui pourraient correspondre à la plus ancienne table de trigonométrie connue, mais ce point de vue est contesté ([**76**]) du fait du peu de traces restantes sur la mesure des angles par les babyloniens. La tablette donne, aux erreurs de copie près signalées ci-après par une étoile, des triplets (a, b, c) ainsi que les valeurs associées $(c/a)^2$. Ce pourrait être un extrait d'une table de trigonométrie pour des angles α variant de $32°$ à $48°$, sachant que l'on peut transcrire les informations portées par *Plimpton 322* comme suit (les mesures des angles en degré n'y figurant pas) :

ligne n°	(a, b, c)	$a/c = \sin\alpha$
5^*	$(72, 68, 97)$	$0,742\,27 = \sin(47,9°)$
1	$(119, 120, 169)$	$0,704\,14 = \sin(44,76°)$
2	$(3367, 3456, 4825)$	$0,697\,82 = \sin(44,25°)$
3	$(4601, 4800, 6649)$	$0,691\,98 = \sin(43,79°)$
4	$(12709, 13500, 18541)$	$0,685\,45 = \sin(43,27°)$
6	$(319, 360, 481)$	$0,663\,20 = \sin(41,54°)$
7	$(2291, 2700, 3541)$	$0,646\,99 = \sin(40,32°)$
8	$(799, 960, 1249)$	$0,639\,71 = \sin(39,77°)$
9	$(481, 600, 769)^*$	$0,625\,49 = \sin(38,72°)$
10	$(4961, 6480, 8161)$	$0,607\,89 = \sin(37,44°)$
11	$(3, 4, 5)^*$	$0,600\,00 = \sin(36,87°)$
12	$(1679, 2400, 2929)$	$0,573\,23 = \sin(34,98°)$
13	$(161, 240, 289)^*$	$0,557\,09 = \sin(33,86°)$
14	$(1771, 2700, 3229)$	$0,548\,47 = \sin(33,26°)$
15	$(28, 45, 53)^*$	$0.528\,30 = \sin(31,89°)$

La tablette *Plimton 322* donne des triplets pythagoriciens correspondant à des triangles rectangles d'hypothénuse c et de plus petit coté a opposé à l'angle α. Elle les classe au triplet $(72, 68, 97)$ près selon les valeurs croissantes de cet angle, raison essentielle qui conduit à penser à une table de trigonométrie. On a rappelé ci-dessus comment l'évaluation de cet angle pouvait être faite, classer de tels angles est beaucoup plus simple, cependant la tablette conduit à se poser la question des

raisons qui ont poussé les babyloniens à procéder ainsi. Egalement, identifier de tels triplets pythagoriciens requiert des connaissances dont il est frappant de contater qu'elles étaient disponibles il y a environ 3600 ans. En tout cas la tablette illustre d'une façon particulière le résultat établi au paragraphe précédent sur le fait qu'une table de trigonométrie peut être donnée par des triangles pythagoriciens. Ainsi la tablette *Plimpton* $n°322$ peut être considérée comme une table de trigonométrie pythagoricienne au sens où on l'a définie avant, à ceci près qu'elle ne donne pas les mesures des angles correspondantes. On se contentait précédemment de construire une telle table en partant du seul triangle sacré $(3, 4, 5)$. La tablette semble obéir à un procédé plus large : elle recense des triangles pythagoriciens dont elle ne dit rien de la façon dont ils sont construits, et elle les classe par angle croissant. Evidemment la question de savoir s'ils sont liés au triangle sacré reste posée. Et en tout cas cette tablette laisse penser que les babyloniens connaissaient le théorème de Pythagore bien avant la naissance de ce dernier...

• Avec les données de la tablette *Plimpton* $n°322$, on voit que l'on peut écrire :

$$\sin(44,25°) = \frac{3367}{4825}, \qquad \cos(44,25°) = \frac{3456}{4825},$$

$$\sin(43,27°) = \frac{12709}{18541}, \qquad \cos(43,27°) = \frac{13500}{18541},$$

ceci donne :

$$\sin(0,98°) = \frac{1532\,196}{89\,460\,325} = 0,017127, \qquad \cos(0,98°) = \frac{89\,447\,203}{89\,460\,325} = 0,999\,85.$$

Une vérification évidente montre que l'on a affaire à un triangle pythagoricien :

$$1532\,196^2 + 89\,447\,203^2 = 89\,460\,325^2.$$

On obtient ainsi à moins de 3×10^{-4} près les valeurs données par une table de trigonométrie moderne pour $\sin 1°$ et $\cos 1°$, ce qui est remarquable pour des calculs issus de travaux aussi anciens. Bien entendu on a fait plus précis ci-dessus, mais on est parti pour cela de [**30**] qui donne page 189 :

$$\sin 1° \approx 0,017452406437284\ ,\ \cos 1° \approx 0,999847695156391.$$

7. Nombre d'or et suite de Fibonacci

On a indiqué ci-dessus que par nombre d'or on désignait en Gréce une notion liée au calendrier et au cycle de Méton. Mais aujourd'hui et plus habituellement depuis la publication de [**50**], ceci n'ayant rien à voir avec le cycle de Méton, ce terme désigne le nombre :

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ce nombre, désigné couramment par la première lettre du nom du sculpteur grec Phidias, est appelé aussi **divine proportion** ou **section dorée**. Qui dit section dit découpage d'un segment $\mathbf{c}$ en deux parties $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ telles que $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Ceci définit six **rapports** (on dit aussi **raisons**) possibles :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}}, \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}, \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{c}}, \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}, \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{b}}.$$

En raisonnant par **analogie**, c'est à dire par comparaison des rapports pour définir ceux qui sont égaux, on obtient la **proportion** de deux rapports égaux. En termes

modernes, la proportion est une classe d'équivalence de rapports égaux entre eux :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}.$$

Et comme Matila Ghyka le fait remarquer dans [**51**], les six rapports précédents comparés deux à deux ne donnent que deux cas impossibles se réduisant à $\mathbf{ab} = \mathbf{c}^2$, six cas triviaux donnant $\mathbf{a} = \mathbf{c}$ ou $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, trois cas de partage symétrique où $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, deux cas de partage asymétrique qui se ramènent par passage à l'inverse au seul premier cas cité ici :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\mathbf{a}}, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}+\mathbf{b}},$$

et deux cas de partage asymétrique inverse qui se ramènent aux précédents en permutant $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$:

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\mathbf{b}}, \qquad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

On peut donc se limiter à considérer une seule proportion qui apparait déjà dans les *Eléments d'Euclide* [**44**], par exemple dans la proposition 11 de son deuxième livre, ou dans la proposition 30 de son sixième livre, qui montre comment sectionner un segment $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ en **moyenne et extrême raison** :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} \; (= \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}}).$$

En termes modernes, ceci donne alors le nombre irrationnel $\Phi = (\mathbf{a}/\mathbf{b})$ avec :

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1.$$

Les trois grandeurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, et $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ sont telles que :

$$\mathbf{b} < \mathbf{a} < \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

et l'on dit que $\mathbf{a}$ est la valeur moyenne (ou **médiété**) des deux valeurs extrêmes $\mathbf{b}$ et $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Plus précisément, en écrivant :

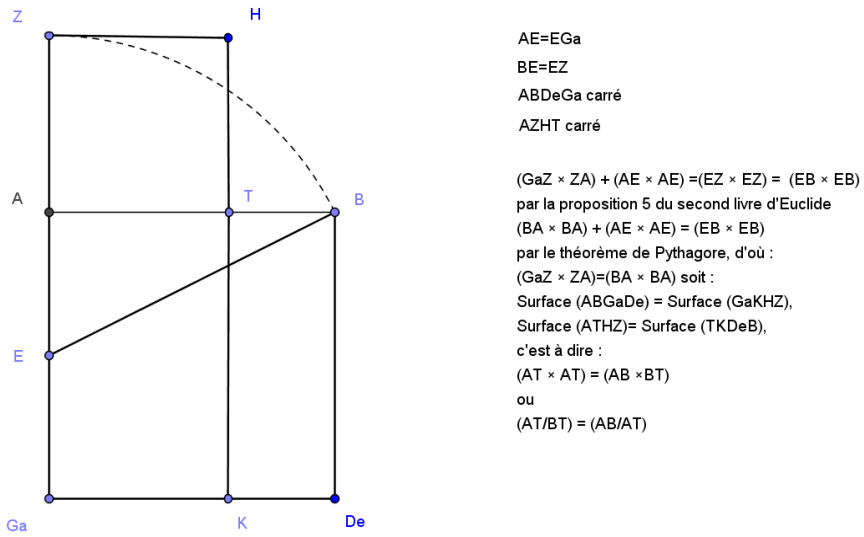
$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}-\mathbf{a}}{\mathbf{a}-\mathbf{b}},$$

le nombre $\mathbf{a}$ est la **moyenne géométrique** $\sqrt{\mathbf{bc}}$ de $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

On trouve du chapitre XXI au chapitre XXIX de l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase [**67**] tous les détails sur cette théorie des proportions "reconnues par tous les anciens, Pythagore, Platon et Aristote". Nicomaque est mort vers 196 après Jésus Christ, et son ouvrage devint par l'intermédiaire de Boèce "l'origine du premier volet du Quadrivium des arts libéraux" enseignés au Moyen Age ([**67**] p. 10). En fait cette forme de l'enseignement des propriétés des nombres remonterait à Pythagore lui-même, c'est à dire à plus de 500 ans avant Jésus Christ, si l'on en croit [**62**] qui a donné une forme moderne à cet enseignement traditionnel.

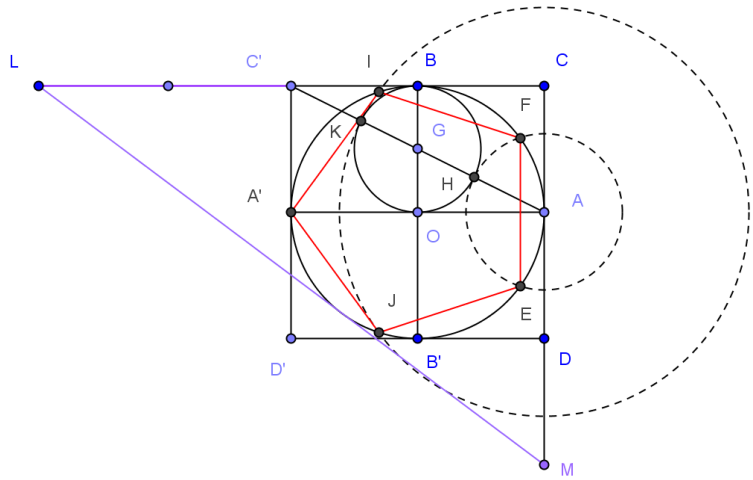
• Euclide explicite quant à lui ce qu'est la section en moyenne et extrême raison dans la troisième définition de son sixième livre. Dans la proposition 11 de son second livre, il affiche la figure suivante où l'on peut poser pour retrouver

l'égalité précédente $\mathbf{a} = AT$, $\mathbf{b} = TB$, et $\mathbf{a} + \mathbf{b} = AB$:



• Ces énoncés d'Euclide ont fait l'objet d'une étude mathématique fouillée par Luca Pacioli publiée dans sa *Divine Proportion* en 1509 (voir [**69**]). En fait cet auteur, en suivant le livre 13 des *Eléments d'Euclide*, explique à l'époque où Marsile Ficin publie sa traduction du *Timée* de Platon comment la division en extrême et moyenne raison permet de construire le pentagone et le dodécaédre, et de les inscrire dans un cercle ou une sphère. Cette théorie sera approfondie par Dürer ([**42**]) puis Kepler ([**57**] planche III p. 50, [**62**] p. 308), etc. Le nombre d'or a été interprété depuis comme un **canon esthétique** qui aurait été utilisé par les grecs pour développer des constructions avec la règle et le compas. Il a donc été placé par différents auteurs à la base de ce que l'on appelle parfois à la suite des travaux de Charles Henry une **esthétique scientifique** [**53**]. Mais pour d'autres cette approche relève du mythe, et bien entendu n'a rien à voir avec le fait que l'on puisse avoir trouvé un rôle au nombre d'or dans la phyllotaxie [**41**], c'est à dire de la branche de la botanique qui étudie la disposition des feuilles sur les branches. On ne se propose pas dans le présent article de trancher cette question pour laquelle un dossier détaillé se trouve dans [**66**]. On se limite à montrer que le nombre d'or se présente naturellement dans la construction du pentagone régulier, et que se donner le triangle sacré ou le nombre d'or sont des démarches équivalentes.

• La figure qui suit montre comment construire un segment de longueur Φ à partir d'un carré $CC'D'D$ de côté égal à 2, ou plus simplement à partir d'un segment OA de longueur 1.



Le triangle GOA est rectangle et donne pour ses côtés l'égalité :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

On a donc la mesure de son hypothénuse AG qui prolongée par GK donne un segment AK dont la longueur vaut le nombre d'or $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La longueur du segment AH donne le nombre conjugué :

$$\overline{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi - 1,$$

avec lequel on obtient :

$$1 = \Phi\overline{\Phi} = \Phi^2 - \Phi, \qquad \Phi^2 = \Phi + 1,$$

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}.$$

Les réduites de cette fraction continue définissent la **suite de Fibonacci** par :

$F_0 = 0,\ F_1 = F_2 = 1,\ F_3 = F_1 + F_2 = 2,\ F_4 = F_2 + F_3 = 3, ..., F_{n+1} = F_{n-1} + F_n.$

Elle est telle que :

$$\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1},$$

et en ajoutant des indices pour compter les apparitions du nombre 1 :

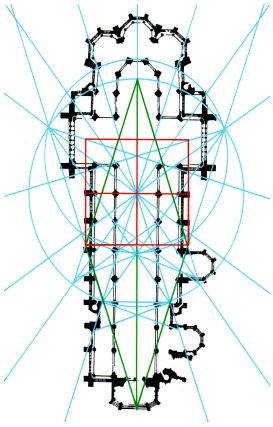
$$1_{(1)} + \frac{1}{1_{(2)} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{1_{(n)}}}} = \frac{F_{n+1}}{F_n} \xrightarrow{n\infty} \Phi.$$

Avec les deux cercles de centre A et de rayon AH et AK, et leur intersection avec le cercle unité centré en O, on obtient les points J et L ainsi que leur symériques par rapport à OA qui permettent de construire un polygone régulier à 5 côtés : un **pentagone régulier** dont la construction fut le signe de reconnaissance des pythagoriciens. Sur la figure précédente on a représenté un triangle sacré LCM.

On voit que le cercle unité de centre O rencontre les cercles de centre A et de rayon AH et AK respectivement en des sommets du pentagone régulier que l'on vient de contruire.

• Cette figure pose de nombreuses questions, comme par exemple le fait que le cercle unité de centre O soit inscrit dans le triangle sacré LCM, ou encore le fait que I, G et D soient alignés. Si l'on se donne le pentagone $FIA'JE$ on voit que l'on peut contruire son centre O à la règle et au compas, puis à partir de OA' qui est de longueur 1 tout le carré $CC'D'D$, donc tout le reste de ce qui apparait dans la figure précédente. Si l'on se donne seulement le segment AK de longueur Φ, on peut faire la même construction, on fabrique ainsi un nouveau segment dont la longueur est donnée par similitude et est donc de longueur $\Phi^2 = \Phi + 1$. Comme on avait au départ un segment de longueur Φ, on en déduit un segment de longueur 1. A partir de là, on peut construire la point H sur AK, et donc G. On en déduit les quatres cercles de la figure, d'où le point O. Et comme on a le point A, on en déduit toute la figure précédente. Remarquons que si l'on se donne le triangle sacré LCM, en comparant les segments LC et CM on fabrique un segment de longueur 1 qui reporté sur les côtés de ce triangle permet de reconstruire le carré $CC'D'D$.

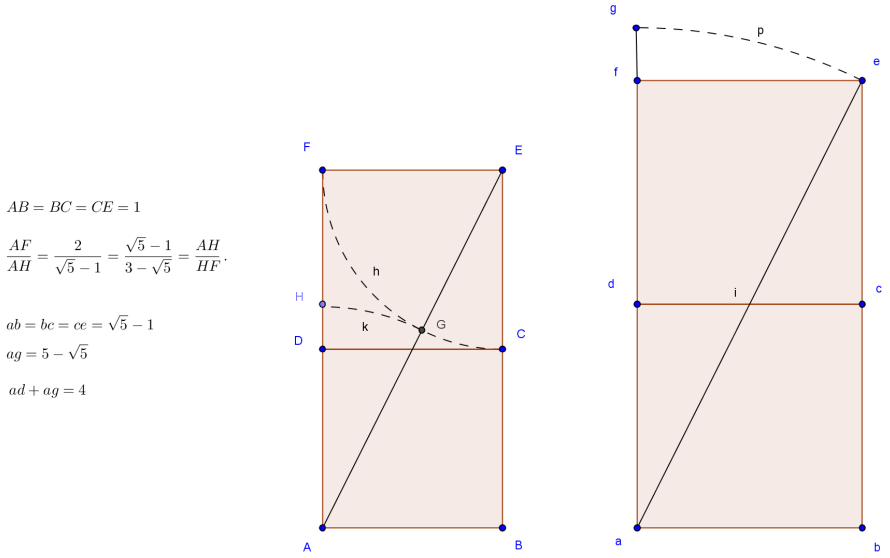
En d'autres termes, on vient de montrer que la connaissance du triangle sacré est équivalente à celle de Φ, ou à celle du carré $CC'D'D$, ou encore à celle du pentagone régulier $FIA'JE$. C'est à dire que l'on vient de montrer qu'utiliser Φ comme canon esthétique, ou au contraire le triangle sacré dans le même rôle, sont deux démarches équivalentes. Simplement, l'utilisation du triangle sacré $(3, 4, 5)$ semble plus naturelle car elle se ramène à la simple proportion $(3/4)$, et ceci montre que la méthode de constrution de Claude Genzling [**11**] pourrait ne pas se démarquer de celles que pourraient avoir utilisées les anciens grecs, par exemple pour construire le Parthénon (voir [**18**] pour l'architecture ancienne). On dit qu'il utilisaient le nombre d'or Φ pour de tels chantiers, et il serait utile de vérifier si l'on peut, avec ce que l'on vient de voir, retrouver le triangle sacré dans l'architecture du Parthénon [**66**]. On donne ci-après l'exemple d'une figure contruite par notre "architecte de Vénus" pour la cathédrale de Metz. On y retrouve centré sur le nombril du bâtiment un carré de côté 2 analogue à celui qui apparait dans notre figure précédente, mais la position des cercles est très différente.



Sur cette figure apparait sous le triangle vert supérieur un pentagone qui permet de retrouver notre figure précédente dans cette construction de Claude Genzling.

Il suffit d'ajouter deux carrés rouge sous les quatre qui sont représentés pour que les choses soient plus claires.

• On peut montrer sur une figure très simple le fait qu'avec la règle et le compas, partant d'un segment unité on peut construire un segment de longueur $(2/\Phi) = \sqrt{5} - 1$. Au demeurant cette construction donnée dans la figure qui suit permet d'exhiber avec le point H une section en moyenne et extrême raison du segment AF :



Inversement le second rectangle montre comment à partir d'un segment de longueur $(2/\Phi) = \sqrt{5} - 1$ on peut construire un segment de longueur 4 qui peut facilement être coupé avec le compas en quatre segments de longueur 1. On vient donc d'établir une relation d'équivalence grâce à la règle et au compas. Définir l'ensemble quotient correspondant est une question intéressante.

• Puisque l'on a fait un lien entre le nombre d'or et le triangle sacré, on est conduit à envisager un lien entre suite de Fibonacci et triangles de Pythagore. On trouve ainsi avec la formule d'Euclide où $m = F_{n+t}$ et $n = F_{n+1}$:

$$((F_{n+t} + F_{n+1})(F_{n+t} - F_{n+1}))^2 + (2F_{n+1}F_{n+t})^2 = (F_{n+t}^2 + F_{n+1}^2)^2.$$

Divisée par $(F_{n+1}F_{n+t})^2$, à la limite pour n infini ceci donne pour tout t entier :

$$(\Phi^{2t-2} - 1)^2 + (2\Phi^{t-1})^2 = (\Phi^{2t-2} + 1)^2.$$

Avec $t = 3$, on obtient plus simplement :

$$(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 = (F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2)^2,\ \Phi^8 - 7\Phi^4 + 1 = 0,\ \Phi^4 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

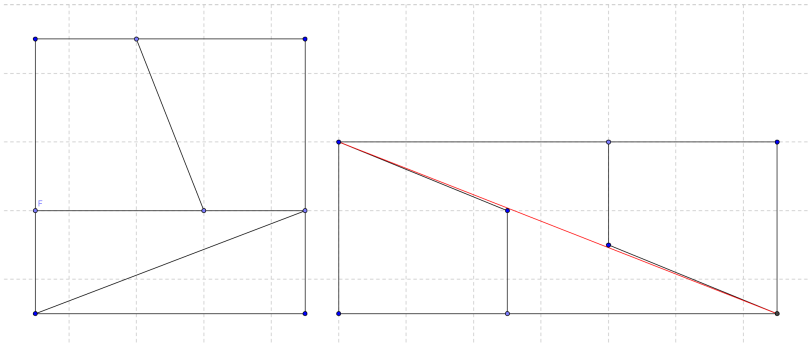
On a aussi, en liaison avec l'angle de 120°, l'égalité :

$$(F_nF_{n+3})^2 + (F_nF_{n+3})(F_{n+1}F_{n+4}) + (F_{n+1}F_{n+4})^2 = (F_nF_{n+2} + F_{n+1}F_{n+4})^2.$$

8. Puzzles et stomachion

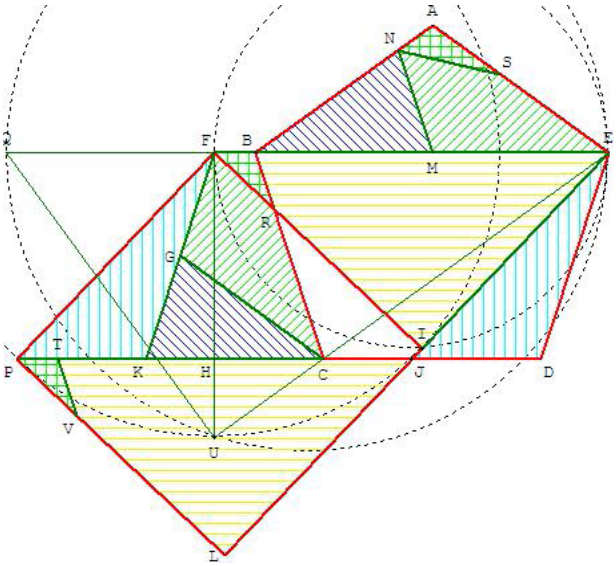
Beaucoup de démonstrations que l'on a trouvées pour le théorème de Pythagore, dont les trois dernières données ci-dessus, peuvent être concrétisées sous la forme

d'un jeu de puzzle. En déplaçant les pièces on passe d'une configuration à une autre où les surfaces totales des pièces peuvent être calculées, on obtient ainsi deux expressions d'une même surface dont on déduit le théorème. Mais attention, il peut y avoir des **illusions d'optique**, comme celle très célèbre ([**38**] p.47) publiée en 1868 par Oscar X. Schlömich [**80**]. Elle est citée par Lewis Caroll, alias Charles L. Dogson l'auteur d'*Alice au pays des merveilles,* dans son ouvrage [**88**] (p. 12) :



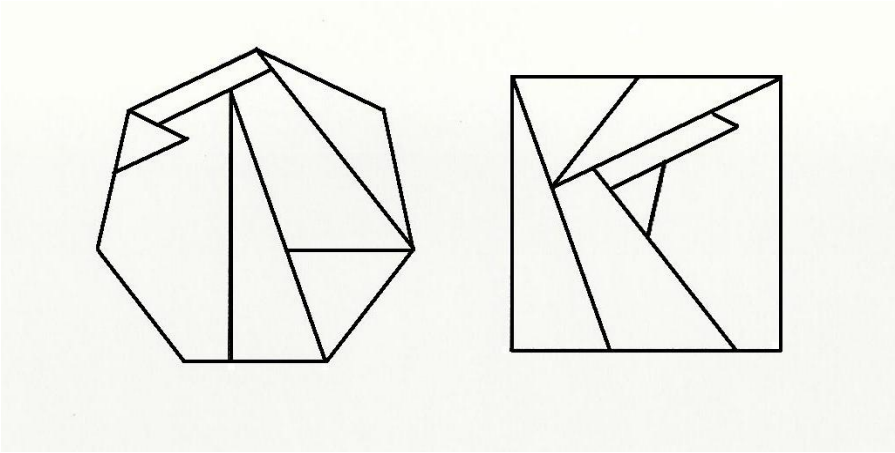
Sur cette figure quatre points semblent alignés, mais il n'en est rien. La différence qui en résulte sur les surfaces est la différence entre $64 = 8 \times 8$ et $65 = 5 \times 13$, c'est à dire 1. Ce puzzle est donc trompeur.

Réfléchir sur les jeux de puzzles donne donc des résultats très intéressants et est stimulant pour l'esprit [**73**], ce fut une activité prisée par les anciens. On trouve dans [**10**] d'autres démonstrations du théorème de Pythagore par puzzles, comme la démonstration du Président Garfield. Patrice Debart y donne aussi une quinzaine de constructions différentes du pentagone régulier, de même qu'un puzzle transformant un pentagone en carré, ce qui est une construction absolument remarquable :



Evidemment une question qui se pose est de savoir si l'on a des figures équivalentes avec d'autres polygones réguliers. En augmentant le nombre de côtés du polygone

on tendrait vers une **quadrature du cercle**, un antique problème déjà étudié dans le papyrus Rhind [**75**] et qui a fait l'objet vers 1450, de pratiquement tous les travaux mathématiques de N. de Cusa [**17**]. En 1925 A. Tarski a redonné actualité à ce problème en demandant s'il est possible de découper un disque en un nombre fini de pièces de puzzle pouvant être repositionnées pour donner un carré. M. Laczkovich a résolu en 1990 cette question, mais de façon non constructive. Il a montré sans l'expliciter qu'un tel puzzle existe, qu'il comprend un très grand nombre de pièces non mesurables, et dont les bords sont des courbes fractales [**58**]. Pour les polygones la situation est plus simple car un théorème du à W. Wallace, P. Gerwien et F. Bolyai établit que lorsque deux polygones du plan ont même aire on peut découper le premier en un nombre fini de pièces polygonales pouvant être réarrangées pour donner le second. De nombreux résultats ont été récemment découverts illustrant ce résultat : des dissections de polygones à n côtés en carrés sont publiées pour toutes les valeurs $n < 13$ ([**25**], [**48**] et [**49**]). Celle que l'on donne ici concerne l'heptagone et est issue du site très documenté [**26**]

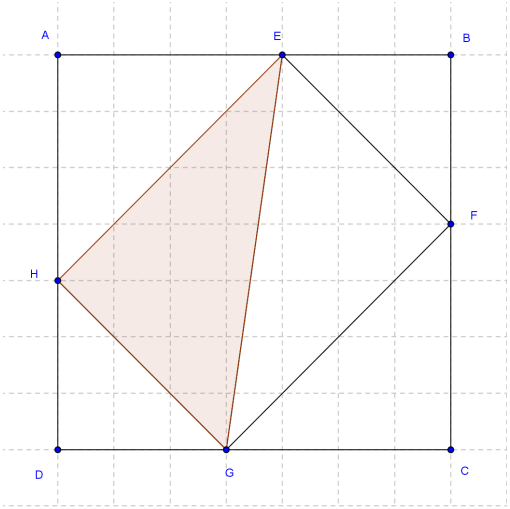


On notera qu'en dimensions supérieures à deux le troisième problème de Hilbert pose la question de l'existence ou non d'une propriété de découpage en puzzles analogue pour des objets hyperpolyédriques d'hypervolumes égaux. Mais M. Dehn montra que ce problème n'a pas de solution en dimension supérieure à deux. Et même alors, le paradoxe de Banach Tarski établit que par un tel découpage les hypervolumes des objets de départ et d'arrivée peuvent être différents... En dimension deux la situation est plus simple, de telles quadratures sont interprétables avec des superpositions de figures dessinées sur deux plans. On va illustrer maintenant ce que peut donner un tel procédé.

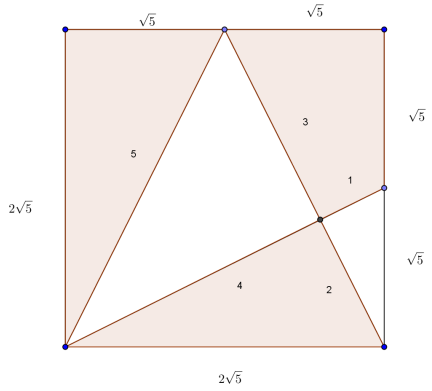
• En superposant une grille de côté $(1/\sqrt{2})$ à une grille de côté 1, on trouve une figure où un carré de $(7/\sqrt{2})$ contient deux triangles sacrés $(3, 4, 5)$ et quatre triangles isocèles rectangles, deux de côtés $(3/\sqrt{2})$ et deux de côtés $(4/\sqrt{2})$. Cette construction correspond à $(\sqrt{2})^2$ près pour les aires à une partition :

$$3^2 + (2 \times 3 \times 4) + 4^2 = 7^2.$$

Voici cette figure où apparaissent deux triangles sacrés composant un rectangle de côtés 3 et 4 inscrit dans le carré de côté $(7/\sqrt{2})$:



• Avec un triangle sacré $(3, 4, 5)$ et un carré de côté $2\sqrt{5}$, on retrouve un puzzle classique à 5 pièces :



On y voit notamment le triangle sacré au milieu de la figure ainsi que trois triangles semblables au triangle $(1, 2, \sqrt{5})$. Une telle figure correspond pour les aires à une partition particulière :

$$4 + 5 + 5 + 6 = 20.$$

Cette figure se prolonge à tout le plan où l'on peut l'interpréter par superposition d'une grille de côté 1 à une grille de côte $2\sqrt{5}$. En ne conservant que la partie gauche du carré sur une longueur $(8\sqrt{5}/5)$ on voit de même apparaitre le triangle sacré inscrit dans un rectangle et encore trois triangles semblables au triangle $(1, 2, \sqrt{5})$. La partition associée pour les aires est cette fois :

$$\frac{9}{5} + \frac{16}{5} + 5 + 6 = 16.$$

Si l'on ajoute maintenant à gauche un rectangle de longueur $(2\sqrt{5})$ et largeur $(3\sqrt{5}/5)$ on fabrique un rectangle de côtés $(2\sqrt{5})$ et $(11\sqrt{5}/5)$ dans lequel on peut inscrire un rectangle composé de deux triangles sacrés $(3, 4, 5)$. On retrouve une figure analogue à celle du cas précédent, mais où $ABCD$ est un rectangle dans lequel est inscrit un autre rectangle $EFGH$ composé de deux triangles sacrés $(3, 4, 5)$, cette fois un peu plus penché.

• Généralisant les deux situations précédentes, on considère un rectangle $EFGH$ composé de deux triangles sacrés $(3, 4, 5)$ et inscrit dans un rectangle $ABCD$. On pourrait d'ailleurs plus généralement remplacer $(3, 4, 5)$ par n'importe quel triangle pythagoricien. Si l'on note ψ l'angle CGF où $GF = 4$, la longueur AB vaut $h = (3\sin\psi + 4\cos\psi)$ et la largeur BC vaut $v = (4\sin\psi + 3\cos\psi)$. Quel que soit ψ variant entre $0°$ et $90°$ on peut construire le rectangle $ABCD$, on a donc une infinité de figures de ce type. La surface du rectangle $ABCD$ vaut :

$$hv = (3\sin\psi + 4\cos\psi)(4\sin\psi + 3\cos\psi) = 12 + \frac{25}{2}\sin 2\psi.$$

Cette expression correspond au compartimentage du rectangle $ABCD$. Elle varie entre la valeur minimale 12 obtenue pour $\psi = 0°$ et $\psi = 90°$, et la valeur maximale $(49/2)$ obtenue pour $\psi = 45°$ et correspondant au premier exemple donné ci-dessus. On a :

$$\sin\psi = \frac{4v - 3h}{7},\ \cos\psi = \frac{4h - 3v}{7},\ 1 = \frac{25h^2 - 48hv + 25v^2}{49}.$$

Cette dernière égalité, mise sous la forme de l'équation d'une ellipse en h et v :

$$25h^2 - 48hv + 25v^2 = 49,$$

donne aussi l'expression précédente de la surface du rectangle $ABCD$. Les cas rencontrés ci-dessus correspondent à $h = v = (7/\sqrt{2})$, $h = (11/\sqrt{5})$ et $v = (10/\sqrt{5})$. On a vu qu'il y a bien d'autres possibilités. On en paramétrise une infinité avec α et β entiers :

$$\sin\psi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \qquad \cos\psi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Ces expressions donnent les cas déjà rencontrés avec $\alpha = \beta = 1$ et $\alpha = 1$, $\beta = 2$, et plus généralement :

$$h = (\frac{3\alpha + 4\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}), \qquad v = (\frac{4\alpha + 3\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}).$$

On peut inversement découper à gauche du rectangle $ABCD$ un rectangle de hauteur v et de largeur $3\sin\psi$, et ajouter à droite un rectangle de même hauteur et de largeur $4\sin\psi\tan\psi$. On fabrique ainsi une figure rectangulaire comparable à la dernière représentée, mais de hauteur $H = (4\sin\psi + 3\cos\psi)$ et de largeur :

$$L = 4\cos\psi + 4\sin\psi\tan\psi = \frac{4}{\cos\psi}.$$

En particulier, on a avec l'égalité $\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1$:

$$(4L)^2 - (HL - 12)^2 = 256 = 16^2,$$

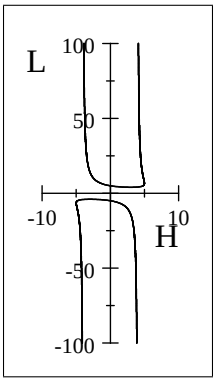
soit, ce qui suppose $L \notin]-4, 4[$ et $H \in [-5, 5]$:

$$H = \frac{12 \pm 4\sqrt{L^2 - 16}}{L}, \qquad L = \frac{12H \pm 16\sqrt{25 - H^2}}{H^2 - 16}$$

On a aussi une description paramétrique de la relation entre H et L :

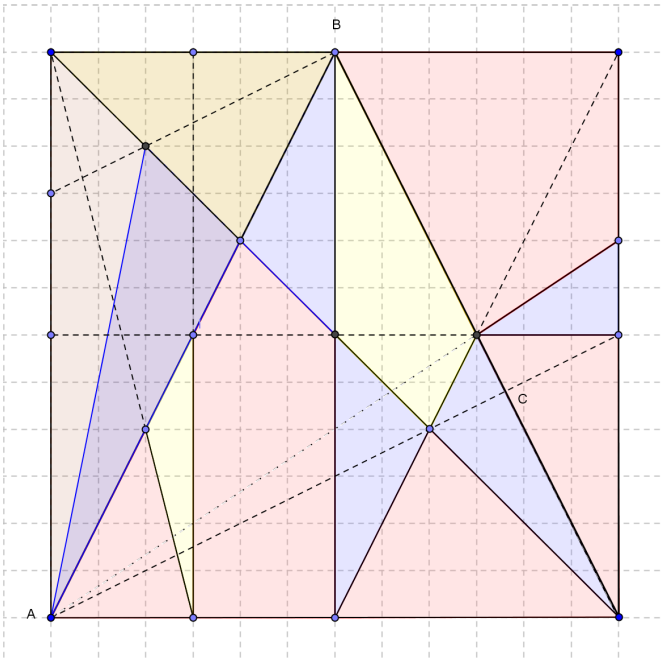
$$H = 4\cosh t \in [-5, 5], \qquad L = 4\tanh t + \frac{3}{\cosh t} \notin]-4, 4[,$$

et une représentation graphique en "courbe sixtine" invariante par la symétrie $(H, L) \to (-H, -L)$:



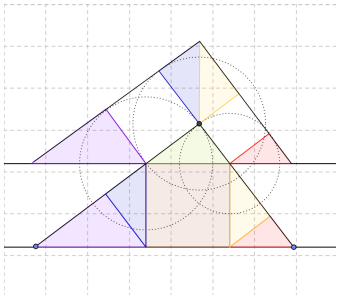
On vérifie que l'on n'a affaire à un carré que si et seulement si $H = L = 2\sqrt{5}$.

• L'avant dernière figure représentée a été enrichie sous la forme suivante :

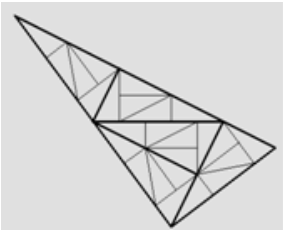


Et cette dernière figure est celle d'un puzzle très célèbre qui fait l'objet d'un traité d'Archimède retrouvé récemment [**68**], *Le Stomachion*. Précédemment ce jeu n'était connu que par un manuscrit fragmentaire intitulé *Cento Nuptialis de Magnus Ausonius* (330- 395 après J.C.), le poête qui a chanté Metz en son temps. Il parle du loculus d'Archimède, et c'est aussi sous ce nom qu'il est évoqué dans [**47**]. En fait les 14 pièces du puzzle peuvent être distribuées de 536 façons différentes pour reconstituer un carré. Ceci a été établi par Bill Cutler ([**27**]) en 2003. Au centre

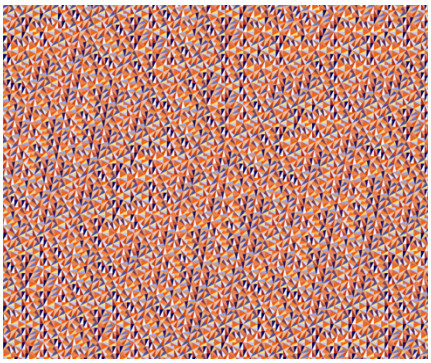
des 536 carrés obtenus, on peut regarder la trace des dissections sur le triangle sacré. On construit ainsi un autre puzzle découpant seulement ce triangle. Sur la dernière figure on voit qu'il est constitué de sept pièces. En raccordant deux triangles sacrés le long de leur hypoténuse, on fabrique un autre puzzle à 14 pièces pour un rectangle de côtés 3 et 4. On donne ici un découpage de ce dernier rectangle en d'autres compartiments. Celui-ci est construit à partir de la figure utilisée dans les Eléments d'Euclide ([**44**]) pour démonter le théorème de Pythagore. Le découpage est du à J. Wipper ([**89**]) et est cité dans l'article d'E. Cousquer ([**12**]), de même que dans l'ouvrage oublié d'E. Fourrey sur les *Curiosités géométriques* ([**47**]). La figure qui suit permet d'identifier plusieurs façons différentes pour reconstituer le triangle sacré avec les pièces décrites. On laisse le lecteur comparer ces découpages et déterminer le nombre total de façon de faire :



• Depuis quelques années, ces exercices de puzzles ont pris une toute nouvelle direction en permettant la construction de pavages quasicristallins du plan. Une exemple type est la **construction en moulin à vent** de J. H. Conway et C. Radin dont on trouve une illustration animée en [**21**]. On part d'un triangle $(1, 2, \sqrt{5})$ et l'on remarque qu'il peut être divisé en cinq triangles isométriques obtenus à partir de celui dont on est parti en le contractant par un facteur $(1/\sqrt{5})$. Ceci construit donc un puzzle à cinq pièces identiques que l'on peut disposer en une seule pièce qui est un triangle de même forme que chaque pièce du puzzle, mais multiplié par $\sqrt{5}$. On peut alors appliquer des opérations successives d'aggrandissement et subdivision qui permettent de couvrir à la limite tout le plan en itérant par exemple autour d'un triangle choisi comme coeur de la construction. On représente ici ce que l'on obtient à la troisième itération :



Et l'on illustre sur un exemple ce que donne un tel pavage qui a déjà été utilisé en architecture sur les façades d'un grand immeuble situé Federation Square à Melbourne (Australie). Voici une image issue de l'Encyclopédie des pavages qui donne une portion d'image fortement itérée [**19**] :



Autour de la construction en moulin à vent on a pu élaborer de nouvelles fractales ([**22**]), explorer la structure de certains sous groupes du groupe $SO(3)$ des rotations de l'espace ([**23**] p. 47), construire de nouvelle figures de diffraction ([**55**]), etc. Il est possible que l'on trouve des applications avec les lasers, par exemple pour le stockage de l'information quantique. Remarquons qu'avec quatre triangles $(1, 2, \sqrt{5})$ on a vu ci-dessus que l'on pouvait construire un carré , mais qu'avec cinq de ces triangles on pouvait construire un triangle de même forme. Si l'on prend en considère vingt fois 5^n, on peut réunir les pièces du puzzle pour fabriquer un carré, avec lequel on peut paver le plan de plusieurs façons ($p4g$ et $p4m$). Avec le même nombre de pièces on fabriquer un rectangle (deux demi carrés) et en déduire d'autres pavage rectangulaires du plan (pg, pgg, pm, pmg, pmm). Il y a donc de très nombreuses façon de procéder pour paver le plan avec des triangles $(1, 2, \sqrt{5})$. La figure vue avant d'un triangle de Pythagore inscrit dans un carré permet d'autres construction de pavages du plan (voir [**24**] pour un remarquable synthèse théorique de ce qui est connu sur les pavages). On peut même paver le plan avec seulement des triangles pythagoriciens. Il suffit d'utiliser pour cela des dissections de rectangles comme celles apparaissant au paragraphe 10.5 de [**28**].

9. Conclusion

Dans ce qui précède, on a montré comment utiliser le triangle sacré $(3, 4, 5)$ ou le nombre d'or Φ comme canons esthétiques peuvent s'avérer être des démarches équivalentes. Pour décrire le cadre du vélo sur lequel Bernard Hinault a gagné plusieurs fois le Tour de France ([**54**]), c'est plutôt le triangle sacré qui semble pertinent. On a vu comment la connaissance de ce triplet permettait de construire des pentagones réguliers, et comment un tel objet pouvait lui même être découpé en pièces donnant un carré. On a fourni des indications sur la généralisation de ce dernier résultat aux polygones réguliers à n cotés. On a vu aussi comment construire une table de trigonométrie pythagoricienne à partir de ce seul triplet sacré, et comment transformer toute table contemporaine en une table analogue à celle dont disposait les babyloniens avec leur tablette *Plimton 322*, et inversement. On donne une telle table en annexe.

Pour compléter cette étude, on signale une construction géométrique permettant d'exhiber tout triplet de Pythagore à partir du seul triplet $(3, 4, 5)$, due à A. Stoll ([**82**]). On considère pour cela un carré unité dans lequel on incrit un cercle. De l'un des sommets P du carré on trace une droite PA, où A est un point de

tangence du cercle et du carré. Cette droite coupe le cercle en A', et l'on considère le rectangle $A'A_1A_2A_3$ inscrit dans le cercle, dont les côtés sont parallèles aux côtés du carré de départ. Les côtés de ce rectangle sont dans un rapport $(4/3)$. En joignant P aux points A_1, A_2, A_3, et en construisant de même les rectangles inscrits associés on trouve de même les triplets $(5, 12, 13)$, $(21, 20, 29)$, $(15, 8, 17)$. Cette construction se poursuit à l'infini et on peut vérifier qu'elle donne tous les triplets pythagoriciens. En fait le résultat associé est qu'en notant :

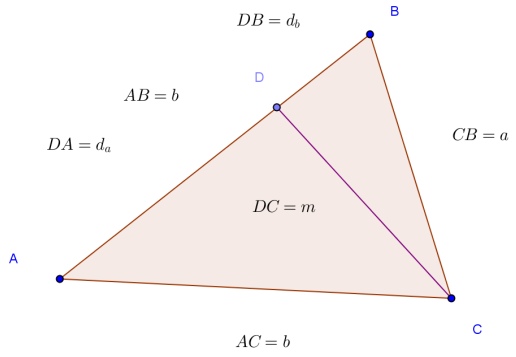
$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \; R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; R_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

tout triplet pythagoricien (a, b, c) est tel que l'on puisse écrire de façon unique :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = R_{i_1} R_{i_2} ... R_{i_p} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Cette construction donne les triplets de la tablette *Plimton 322*. On peut en effet, sans mesurer les angles, les classer par leur ordre de grandeur au fur et à mesure qu'ils se présentent. C'est facile à faire, et cela donne un procédé systématique pour prolonger la tablette par une table aussi fouillée que souhaitée. On comprend avec cette même figure ce que signifie le thèorème de densité que l'on a évoqué. Ajoutons qu'il existe d'autres constructions algorithmiques ([**43**]) pour exhiber par exemple des triplets pythagoriciens dont la différence entre les deux premiers termes vaut 1, tels que $(3, 4, 5)$, $(20, 21, 29)$, $(119, 120, 169)$, $(696, 697, 985)$, $(4059, 4060, 5741)$,...

S'il fallait terminer par un beau résultat généralisant le théorème de Pythagore, on citerait le théorème de Matthew Stewart (1746) qui concerne un triangle ABC coupé en deux parties par un segment CD de longueur m. Alors si d_a est la longueur DA, et si d_b est la longueur DB, correspondant à la figure suivante :



On a l'égalité :

$$a^2 d_a + b^2 d_b = c(m^2 + d_a d_b).$$

Dans le cas où l'angle γ de sommet C est droit, et avec CD médiane du triangle, ce résultat redonne le théorème de Pythagore.

Annexe :

On fournit ci-après une double table de trigonométrie donnant avec une précision meilleure que le millième de degré d'angle les triplets (a, b, c) correspondant aux angles x mesurés en demi-degrés de $0°$ à $90°$. Evidemment $a^2 + b^2 = c^2$, et avec les formules classiques de trigonométrie, notamment :

$$\sin(x°) = \cos(90° - x°) = \frac{a}{c},\ \cos(x°) = \sin(90° - x°) = \frac{b}{c},$$

il suffit de se limiter à $0° \leq x° \leq 45°$. La table est obtenue grâce au calculateur du très intéressant site [**28**], avec un écart $e°$ sur $x°$ inférieur à 10^{-3} degré. Plus précisément le triplet de la première colonne correspond à un angle y plus petit que x, mais de mesure $y°$ située sous $x°$ à moins de 10^{-3} degré. Pour la seconde colonne, z est plus grand que x et la mesure $z°$ est au dessus de $x°$ mais à moins de 10^{-3} degré :

Angle x°	Triplet pour y°=x°-e°<x°	Triplet pour z°=x°+e°> x°
0.5°	3177660, 27731, 3177781	26220, 229, 26221
1°	164152, 2865, 164177	52437, 916, 52445
1,5°	145899, 3820, 145949	492940, 12909, 493109
2°	3153215, 110112, 3155137	80376, 2807, 80425
2.5°	75589, 3300, 75661	1764480, 77039, 1766161
3°	18228, 955, 18253	373065, 19552, 373577
3.5°	120428, 7365, 120653	732576, 44807, 733945
4°	49552, 3465, 49673	553408837, 38698116, 554760205
4.5°	78279, 6160, 78521	310780, 24459, 311741
5°	115460, 10101, 115901	52341, 4580, 52541
5.5°	8235085, 792948, 8273173	26160, 2519, 26281
6°	52297, 5496, 52585	113452, 11925, 114077
6.5°	100165, 11412, 100813	81748, 9315, 82277
7°	106529, 13080, 107329	13892316, 1705763, 13996645
7.5°	111384, 14663, 112345	176252, 23205, 177773
8°	2080788, 292435, 2101237	20349, 2860, 20549
8.5°	110308, 16485, 111533	381045, 56948, 385277
9°	2513336, 398073, 2544665	46367, 7344, 46945
9.5°	17337600, 2901319, 17578681	60480, 10121, 61321
10°	560660, 98859, 569309	4829187, 851516, 4903685
10.5°	2467668, 457355, 2509693	16968, 3145, 17257
11°	984793, 191424, 1003225	9028, 1755, 9197
11.5°	82103, 16704, 83785	90240, 18361, 92089
12°	10841617, 2304456, 11083825	54832, 11655, 56057

Angle x°	Triplet pour y°=x°-e°<x°	Triplet pour z°=x°+e°> x°
12.5°	153264, 33977, 156985	43571, 9660, 44629
13°	2395104, 552953, 2458105	1113203, 257004, 1142485
13.5°	168995, 40572, 173797	29206944, 7011967, 30036865
14°	1142280, 284801, 1177249	614691, 153260, 633509
14.5°	189700, 49059, 195941	827492, 214005, 854717
15°	567681228, 152109725, 587706853	62620, 16779, 64829
15.5°	81347695, 22559712, 84417937	14016, 3887, 14545
16°	33549, 9620, 34901	158959060, 45580779, 165365021
16.5°	219076, 64893, 228485	39159, 11600, 40841
17°	202401, 61880, 211649	331100, 101229, 346229
17.5°	1233447, 388904, 1293305	602540, 189981, 631781
18°	10901220, 3542021, 11462221	101083, 32844, 106285
18.5°	987153, 330296, 1040945	210100, 70299, 221549
19°	1449504, 499103, 1533025	29172, 10045, 30853
19.5°	61152, 21655, 64873	76462580, 27076821, 81115229
20°	318636, 115973, 339085	1301400, 473671, 1384921
20.5°	101896, 38097, 108785	2981844, 1114867, 3183445
21°	116400, 44681, 124681	51975, 19952, 55673
21.5°	458939, 180780, 493261	1025976, 404143, 1102705
22°	87720, 35441, 94609	10942016, 4420863, 11801345
22.5°	64680, 26791, 70009	2339064, 968873, 2531785
23°	14949, 6500, 16301	315248, 133815, 342473
23.5°	14949, 6500, 16301	339722176, 147715407, 370447025
24°	593528, 264255, 649697	40913, 18216, 44785
24.5°	786692, 358515, 864533	50944, 23217, 55985
25°	525156, 244883, 579445	42735, 19928, 47153
25.5°	447670280, 213527769, 495986681	8904, 4247, 9865
26°	1144572, 558245, 1273453	562757, 274476, 626125
26.5°	486552, 242585, 543673	50500, 25179, 56429
27°	131856, 67183, 147985	108108, 55085, 121333
27.5°	353269, 183900, 398269	126616, 65913, 142745
28°	2076503, 1104096, 2351785	65240, 34689, 73889
28.5°	316758824, 171986007, 360437705	3713, 2016, 4225
29°	14324596, 7940253, 16378085	3139, 1740, 3589
29.5°	364468, 206205, 418757	174493, 98724, 200485
30°	40545, 23408, 46817	151316, 87363, 174725
30.5°	1651548, 972835, 1916773	6644716, 3914037, 7711805
31°	137864620, 82837419, 160837469	346869, 208420, 404669

Angle x°	Triplet pour y°=x°-e°<x°	Triplet pour z°=x°+e°> x°
31.5°	2407172, 1475115, 2823197	1244985, 762928, 1460153
32°	3181332, 1987915, 3751357	79032, 49385, 93193
32.5°	380681, 242520, 451369	22752, 14495, 26977
33°	87685388, 56943555, 104552837	91956, 59717, 109645
33.5°	6673576, 4417143, 8002985	4824, 3193, 5785
34°	5035264, 3396327, 6073625	22345, 15072, 26953
34.5°	324120, 222761, 393289	75576, 51943, 91705
35°	258735, 181168, 315857	19277440, 13498209, 23533409
35.5°	72884, 51987, 89525	602820, 429989, 740461
36°	4246777, 3085464, 5249305	44940, 32651, 55549
36.5°	69377, 51336, 86305	62000, 45879, 77129
37°	124256, 93633, 155585	61425, 46288, 76913
37.5°	5256, 4033, 6625	3214227, 2466364, 4051445
38°	506443, 395676, 642685	103668, 80995, 131557
38.5°	3485, 2772, 4453	1116888, 888415, 1427137
39°	1475801, 1195080, 1899001	88160, 71391, 113441
39.5°	75012, 61835, 97213	32490784, 26783337, 42106985
40°	44029368, 36945025, 57476257	64183, 53856, 83785
40.5°	175272, 149695, 230497	306964, 262173, 403685
41°	134400, 116831, 178081	653884, 568413, 866405
41.5°	128935, 114072, 172153	163854900, 144966571, 218777821
42°	71316, 64213, 95965	11171468, 10058835, 15032693
42.5°	12600720, 11546431, 17090881	12767768, 11699505, 17317457
43°	1808268, 1686235, 2472493	933205, 870228, 1275997
43.5°	1117809, 1060760, 1541009	15660, 14861, 21589
44°	125184, 120887, 174025	232212, 224245, 322813
44.5°	2211888, 2173615, 3101137	2128248, 2091425, 2983873
45°	137904, 137903, 195025	803760, 803761, 1136689

Bibliography

[1] http://fr.wikipedia.org/wiki/Hipparque
[2] http://serge.mehl.free.fr/chrono/Ptolemee.html
[3] http://remacle.org/bloodwolf/erudits/ptoleme/table.htm
[4] http://home.nordnet.fr/ ~ajuhel/Carnot/arnot.htm
[5] http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoPlane/Cocyclik/CocyDis1.htm
[6] http://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/index.html
[7] http://www.cut-the-knot.ord/pythagoras/index.shtml
[8] http://ctext.org/zhou-bi-suan-jing
[9] http://images.math.cnrs.fr/Decoupage-d-Airy-et-theoreme-de.html
[10] http://www.debart.pagesperso-orange.fr/géométrie
[11] http://www.gentzling.fr
[12] http://ddata.over-blog.com/xxxyyy/2/78/40/05/histoire_des_maths/pythagore.pdf
[13] http://www.ams.org/notices/201004/rtx100400464p.pdf
[14] http://locomat.loria.fr/
[15] http://www.forgottenbooks.org/books/Curiosites_Geometriques_1200093073
[16] http://users.cjb.net/williamsherronanglin/pythagoreantriangles.html
[17] http://perso.wanadoo.fr/jm.nicolle/cusa
[18] http://books.openedition.org/efr/2450
[19] http://tilings.math.uni-bielefeld.de/papers
[20] http://mathematik.uni-bielefeld.de/ ~sillke/
[21] http://jsfiddle.net/G8C8T/10/embedded/result/
[22] http://arxiv.org/pdf/1001.2203v3.pdf
[23] http://edoc.unibas.ch/16594/1/20100127164658_4b605ff23ae27.pdf
[24] http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups01.01.pdf
[25] http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/Coniques/Panoplie/Dissect/dissectG.htm
[26] http://home.btconnect.com/GavinTheobald/HTML/Square.html
[27] http://home.comcast.net/ ~billcutler/stock/jerrymander.htm
[28] http://math.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Phytag/pythag.html
[29] http://therese.eveillau.pagesperso-orange.fr/pages/truc-mat/indexF.htm
[30] M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of mathematical functions, Dover, 1965
[31] G. Aujac, Claude Ptolémée, astronome, astrologue, géographe, connaissance et reorésentation du monde habité, Editions du CTHS, 1993
[32] J. Brunschwig, G. Lloyd, P. Pellegrin, Le savoir grec, Flammarion, 2011
[33] P. Brémaud, Le dossier Pythagore, du chamanisme à la mécanique quantique, Ellipses, 2010
[34] L. N. M. Carnot, Géométrie de position, Duprat, 1803
[35] M. Caveing, Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Egypte anciennes, Presses Universitaires du Septentrion,
[36] Cicéron, De re publica, Livre 1, 14 (22), voir aussi De natura deorum, Livre 2, 34 (88)
[37] A.C. Clairaut, Eléments de Géométrie, David 1753, réédition Siloë, 1987
[38] F. Corbalán, Le nombre d'or - Le langage mathématique de la beauté, Le monde est mathématique, 2010
[39] P. Couderc, Le Calendrier, Presses Universitaires de France, 1946
[40] S.G. Dani, On the Pythagorean triples in the Śulvasūtras, Current science, vol.85, n° 2, 25 july 2003
[41] S. Douady, Y. Couder, Phyllotaxis as a dynamical self organising process; J. Theor. Biol. n°178, 1996, pp. 255 - 312
[42] A. Dürer, Géométrie, Présentation et traduction de J. Peiffer, Seuil, 1995

[43] R.H. Dye, R.W.D. Nickalls, A new algorithm for generating Pythagorean triples, The Mathematical Gazette n°82, March 1998, pp. 86-91
[44] Euclide, Les Eléments, traduction française de G.J. Kayas, Editions du CNRS, 1978
[45] C.H. Eyraud, Horloges astronomiques au tournant du XVIIIème siècle : de l'à-peu-près à la précision, Université Lyon 2, 15 décembre 2004
[46] A. Faisant, L'équation diophantienne du second degré, Hermann, 1991
[47] E. Fourrey, Curiosités géométriques, Editions Vuibert et Nony, 1907
[48] G.N. Frederickson, Dissections : Plane & Fancy, Cambridge University Press, 1997
[49] G.N. Frederickson, Hinged dissections, swinging and twisting, Cambridge University Press, 2002
[50] M.C. Ghyka, Le nombre d'or, Gallimard NRF, 1931
[51] M.C. Ghyka, Philosophie et mystique du nombre, Payot, 1952
[52] G.H. Hardy, E.M. Wright, An introduction to the theory of numbers, 5th edition, Oxford, 1983, ch.X
[53] C. Henry, Introduction à une esthétique scientifique, Revue contemporaine, 25 aout 1885
[54] B. Hinault, C. Gentzling, Cyclisme sur route, Robert Laffont, 1986
[55] A. Hof, On diffraction by aperiodic structures, Commun. Math. Phys. 169, 25–43 (1995).
[56] Jamblique, Vie de Pythagore, Les Belles Lettres, 1996
[57] J. Kepler, Le secret du monde, Gallimard, 1984
[58] M. Laczkovich, Equidecomposability and discrepancy : a solution to Tarski's circle suqaring problems, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol 404, 1990, pp. 77-107
[59] A.M. Legendre, Eléments de Géométrie, Firmin Didot, 3ème édition, 1853
[60] A. Lernould, Etudes sur le commentaire de Proclus au premier livre des éléments d'Euclide , Presses Universitaires du Septentrion, 2010
[61] E.S. Loomis, The Pythagorean proposition, National council of teachers of mathematics, 1968, accessible à l'adresse files.eric.ed.gov/fulltex/E0037335.pdf
[62] M. Lundy, D. Sutton, A. Ashton, J. Martineau, Quadrivium - The four classical liberal arts of Number, Geometry, Music and Cosmology, Walker and Company, 2011
[63] E. Maor, Trigonometric delights, Princeton University Press, 2002
[64] Les neuf chapitres, Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires, Edition critique par Karine Chemla et Guo Shuchun, Dunod, 2004
[65] O. Neugebauer, Les sciences exactes dans l'antiquité, Actes Sud, 1990
[66] M. Neveux, H.E. Huntley, Le nombre d'or - Radiographie d'un mythe, Seuil Sciences, 1995
[67] Nicomaque de Gérase, Introduction arithmétique, traduction par J. Bertier, Vrin, 1978
[68] W. Noel, R. Netz, Le codex d'Archimède, J.C. Lattès, 2008
[69] L. Pacioli, Divine proportion, Librairie du Compagnonnage, 1988
[70] K. Plofker, Mathematics in India, Princeton University Press, 1963
[71] D. de Solla Price, Gears from the greeks : the Antikythera mecanism - a calendar computer from ca. 80 BC., Transactions of the American Philosophical Society, vol 66, n°7, 1974
[72] C. Ptolémée, Composition mathématique, traduit par M. Halma, Editions Henri Grand, 1813
[73] M. Petković, Famous puzzles of great mathematicians, AMS, 2009
[74] J.N. Robert, De Rome à la Chine, Les Belles Lettres, 2014
[75] G. Robins, C. Shute, The Rhind mathematical papyrus - an ancient Egyptian text, Dover, 1987
[76] E. Robson, Neither Sherlock Holmes nor Babylon : A reassessment of Plimpton 322, Historia Mathematica n°28, 2001, pp. 167-206
[77] E. Robson, Words and pictures, new light on Plimpton 322, Monthly 109, Feb 2002, The Mathematical Association of America, pp. 105-120
[78] W.-W. Rouse Ball, Histoire des mathématiques, tome 1, Hermann, 1927, p. 92
[79] P. Shiu, The shapes and sizes if Pythagorean triangles, The Mathematical Gazette, vol 67, n°439, March 1983, pp. 33-38
[80] O.X. Schlömilch, Kurze Mitteilung, 1868
[81] W. Sierpinski, Pythagorean triangles, Dover, 2003
[82] A. Stoll, Générations géométrique et algébrique des triplets pythagoriciens, L'ouvert, n°100, 2000, pp. 1-8
[83] Á. Szabó et E. Maula, Les débuts de l'astronomie, de la géographie et de la trigonométrie chez les Grecs, traduit de l'allemand par Michel Federspiel, Paris, J. Vrin, 1986

[84] M. Vermot, P. Baray, G. Prongué, S. Dorder, M. Winkler, Traité de construction horlogère, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2011

[85] J. Zimba, On the possibiblity of trigonometric proofs of the pythagorean theorem, Forum geometricorum, vol.9, 2009, pp. 275-278

[86] J. Høyrup, Pythagorean 'Rule' and 'Theorem' – Mirror of the Relation Between Babylonian and Greek Mathematics", pp. 393–407 in Johannes Renger (ed.), Babylon: Focus mesopotamischer Geschichte, Wiege früher Gelehrsamkeit, Mythos in der Moderne. 2. Internationales Colloquium der Deutschen Orient-Gesellschaft, 24.–26. März 1998 in Berlin. Berlin: Deutsche Orient-Gesellschaft / Saarbrücken: SDV Saarbrücker Druckerei und Verlag. http://akira.ruc.dk/~jensh/Publications/Pythrule.pdf

[87] J. Høyrup, Les quatre côtés et l'aire – sur une tradition anonyme et oubliée qui a engendré ou influencé trois grandes traditions mathématiques savantes, pp. 507–531 in Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique. Actes de la première Université d'été européenne, Montpellier 10 au 13 juillet 1993. Montpellier - IREM de Montpellier, 1995. The publisher having omitted proof-reading, the article contains some 270 errors, including wrong formulae and skipped passages. Corrected republication pp. 192–224 in E. Gallo, L. Giacardi & C. S. Roero (eds), Associazione Subalpina Mathesis. Seminario di Storia delle Matematiche "Tullio Viola". Conferenze e Seminari 1995–1996. Torino: Associazione Subalpina Mathesis, 1996, http://akira.ruc.dk/~jensh/Publications/

[88] E. Wakeling, Rediscovered Lewis Carroll puzzles, Dover, 1995

[89] J. Wipper, Sechsundvierzig Beweise des Pythagoräischen Lehrsatses, Leipzig, 1880