



**HAL**  
open science

## Positivité d'une covariance de type MA(2) ou MA(3)

Bernard Picinbono

► **To cite this version:**

Bernard Picinbono. Positivité d'une covariance de type MA(2) ou MA(3). *Traitement du Signal*, 2016, 22 (4), pp. 403-414. hal-01656610

**HAL Id: hal-01656610**

**<https://centralesupelec.hal.science/hal-01656610>**

Submitted on 5 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Positivité d'une covariance de type MA(2) ou MA(3)

La version de ce texte tel qu'il a été publié dans la revue *Traitement du signal* peut être obtenue sous forme d'un fichier pdf sur demande à l'auteur à l'adresse : [bernard.picinbono@lss.supelec.fr](mailto:bernard.picinbono@lss.supelec.fr)

**Bernard Picinbono**

*Laboratoire des Signaux et Systèmes (L2S, UMR CNRS 8506)*

*Université Paris-Sud - CNRS - CentraleSupélec*

*3, rue Joliot Curie*

*91192, Gif-sur-Yvette*

*RÉSUMÉ. La fonction de corrélation  $\gamma_k$  d'un signal aléatoire réel à temps discret de type "moving average" [MA( $q$ )] est nulle pour  $k \geq |q|$  mais les autres valeurs doivent satisfaire des conditions assurant que  $\gamma_k$  est de type défini non négatif, ce qui revient à assurer que sa transformée de Fourier  $\Gamma(\nu)$ , qui est la densité spectrale du signal, soit non négative. Il existe des conditions générales sur  $\gamma_k$  assurant cette propriété mais elles sont difficilement utilisables pour déterminer son domaine de validité  $D_+$  dans l'espace à  $q$  dimensions où le vecteur  $\mathbf{c}$  de composantes  $\gamma_k$  prend ses valeurs. C'est ce domaine qui est étudié dans les cas  $q = 2$  et  $q = 3$ . Ses frontières sont déterminées par le calcul et une procédure de simulation permettant de vérifier si une fonction spectrale est non négative ou pas est introduite montrant un excellent accord entre résultats théoriques ou de simulation.*

*ABSTRACT. The covariance function  $\gamma_k$  of a real discrete-time moving average of order  $q$  random signal is zero for  $k > |q|$  but its other values must satisfy some conditions ensuring that  $\gamma_k$  is a non-negative-definite function, which means that its Fourier transform, or its power spectrum, is non-negative. There are some general conditions ensuring this property but they cannot be used in order to determine the domain  $D_+$  such that when the vector  $\mathbf{c}$  of components  $\gamma_k$  belongs to this domain then  $\gamma_k$  has the required non-negative property. The boundaries of the domain are determined for  $q = 2$  and  $q = 3$  theoretically and computer simulations exhibit an excellent agreement between theoretical and simulated results.*

*MOTS-CLEFS : Signaux MA et AR, conditions sur la covariance, matrices de covariance.*

*KEYWORDS : MA and AR signals, conditions on the covariance, covariance matrices.*

## 1 Introduction

La caractéristique principale de la fonction de covariance  $\gamma_k$  d'un signal de type MA( $q$ ), (MA : *Moving Average*) est que celle-ci est nulle pour  $k > q$ . Mais cela ne signifie pas que les valeurs de cette covariance pour les autres valeurs de  $k$  soient quelconques puisqu'il faut encore s'assurer que la fonction de covariance complète est définie non-négative (DNN). Nous nous proposons d'examiner ce problème dans les cas  $q = 2$  et  $q = 3$ , cette approche montrant le type de questions qu'il faudrait examiner dans le cas général.

Le même type de problème se pose dans le cas des signaux autorégressifs d'ordre  $r$ , AR( $r$ ). Il possède toutefois une solution complète que nous allons brièvement rappeler pour mieux comprendre la différence entre les situations AR et MA.

Un signal AR( $r$ )  $s_k$  de puissance unité est défini par la récurrence

$$s_k = \mathbf{a}^T \mathbf{S}_k + w_k, \quad (1)$$

où  $\mathbf{a}$  est le vecteur dit de régression à  $r$  composantes,  $\mathbf{S}_k$  le vecteur du passé fini de  $s_k$  de composantes  $s_{k-i}$ ,  $1 \leq i \leq r$  et  $w_k$  un bruit blanc au sens large de puissance  $\sigma_w^2$  assurant que la variance de  $s_k$  vaut 1. Les composantes  $a_i$  de  $\mathbf{a}$  sont soumises à une *condition de stabilité* assurant que le filtre faisant passer de  $w_k$  à  $s_k$  défini par (1) dont la fonction de transfert est du type tout pôles, ait tous ses pôles situés à l'intérieur du cercle unité. Dans l'espace  $R^r$  où  $\mathbf{a}$  prend ses valeurs cela introduit un domaine  $D_a$  dit de stabilité. Ce domaine peut être déduit des critères de stabilité comme celui de Routh assurant qu'un polynôme de degré  $r$  possède ses racines à l'intérieur du cercle unité. La détermination de  $D_a$  est assez complexe dans le cas général mais pour  $r = 2$ ,  $D_a$  se réduit à l'intérieur d'un triangle relativement simple à déterminer (cf Picinbono, 1995, 143, Kay, 1988).

Passons maintenant au cas de la fonction de covariance  $\gamma_i$  de  $s_k$ . On appelle vecteur de covariance le vecteur  $\mathbf{c}$  de composantes  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  et matrices de covariances les matrices  $\mathbf{\Gamma}_i$  de Toeplitz  $i \times i$  symétriques dont les premières lignes valent  $[1, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{i-1}]$ . On montre alors que la fonction de covariance  $\gamma_i$  de  $s_k$  défini par (1) est entièrement déterminée dès lors qu'on la connaît pour

$i \leq r$  et que toutes les valeurs de  $\gamma_i$  pour  $i > r$  se déduisent par des récurrences simples à partir des  $\gamma_i$  pour  $i \leq r$ . De plus la seule condition que doivent vérifier ces valeurs est que la matrice  $\mathbf{\Gamma}_{r+1}$  qu'elles définissent soit DNN. La vérification de cette propriété est loin d'être simple pour  $r > 2$ . Lorsqu'elles sont vérifiées on dit que le vecteur  $\mathbf{c}$  appartient au domaine  $D_+$  de positivité de la matrice de Toeplitz qu'il définit.

Mais il existe dans le cas autorégressif un détour qui permet très simplement de surmonter cette difficulté (cf Picinbono, 1995, 148). Il consiste à introduire un nouveau vecteur de  $R^r$  d'innommé vecteur de réflexion  $\mathbf{k}$  qui apparaît dans la résolution récursive des équations normales avec une matrice de covariance de Toeplitz. On montre aussi qu'il y a une correspondance biunivoque entre les trois vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{k}$  et qu'il existe des algorithmes rapides pour passer des uns aux autres. Il apparaît alors que la condition nécessaire et suffisante pour que  $\mathbf{a}$  appartienne au domaine  $D_a$  (stabilité du filtre générateur) ou que  $\mathbf{c}$  appartienne à  $D_+$  (positivité de la matrice de covariance) est que les composantes de  $\mathbf{k}$  satisfassent  $|k_i| < 1$ ,  $1 \leq i \leq r$  ce qui définit un hypercube dans  $R^r$ . Ainsi pour savoir si une suite de  $r$  valeurs  $\gamma_i$  constituent les  $r$  premières valeurs d'une fonction de covariance d'un modèle AR, et donc la fonction complète, d'après ce qui a été indiqué ci-dessus, il suffit de calculer le vecteur  $\mathbf{k}$  correspondant et de s'assurer qu'il est dans l'hypercube, ce qui est une opération relativement simple.

Tout ceci disparaît dans le cas de signaux MA. Certes la fonction de covariance de tels signaux est entièrement déterminée par le vecteur  $\mathbf{c}$  puisqu'il suffit ensuite de compléter la suite des valeurs par des zéros, ce qui est beaucoup plus simple que dans le cas autorégressif. Mais même si la matrice de Toeplitz  $\mathbf{\Gamma}_{r+1}$  est définie positive, ceci n'entraîne nullement que la fonction obtenue par adjonction de zéros soit DNN, et nous en verrons des exemples dans la suite. Ainsi la méthodologie si puissante dans le cas autorégressif n'est d'aucun intérêt dans ce cas et il faut reprendre le problème dès le début. C'est ce que nous allons présenter dans le cas de signaux MA(2) ou MA(3).

Ce problème a été relativement peu étudié dans la littérature. La condition générale assurant qu'une suite de  $q$  nombres  $\gamma_k$  puissent constituer la fonction de corrélation d'un signal MA( $q$ ) est bien connue et peut s'exprimer par le fait que le polynôme trigonométrique de terme général  $\gamma_k \cos(k\omega)$  est non négatif pour tout  $\omega$  [voir (2)]. Mais ceci ne donne pas immédiatement la forme du domaine  $D_+$  dans lequel soit se trouver le vecteur  $\mathbf{c}$  introduit précédemment. Le

problème a été abordé par Steinhardt (1988) qui donne des propriétés générales de ce domaine et présente sans en expliciter le calcul sa forme dans le cas  $q = 2$ . Cette forme est analogue à celle calculée explicitement dans le paragraphe suivant et apparaissant sur la figure 3 ci-après. Ces résultats sont repris dans un contexte d'estimation par Moses et Liu (1991) mais n'interfèrent pas avec la discussion que nous présentons ci-dessous.

## 2 Fonction de covariance d'un signal MA(2)

Commençons par illustrer ce qui vient d'être dit sur la conservation du caractère DNN d'une matrice de Toeplitz augmentée par des zéros. Partons du cas le plus simple, c'est-à-dire d'une matrice  $2 \times 2$  du type  $T_2[1, a]$ . Il est clair que cette matrice est DNN si  $|a| < 1$ . Si cette matrice est une matrice de covariance, cette inégalité est en fait l'inégalité de Schwarz pour les couples de variables aléatoires. En ajoutant un zéro on obtient la matrice  $3 \times 3$  de Toeplitz  $T_3[1, a, 0]$ . Si  $|a| < 1$  elle est DNN si et seulement si son déterminant est NN. Ceci donne l'inégalité  $1 - 2a^2 \geq 0$  ou  $a^2 \leq 1/2$ , ce qui montre que pour les valeurs de  $a$  satisfaisant  $1/2 < a^2 < 1$  la matrice  $T_3[1, a, 0]$  n'est plus DNN alors que  $T_2[1, a]$  l'est. On peut continuer ainsi en ajoutant un nombre arbitraire de zéros mais le calcul devient rapidement assez laborieux, même si la structure de Toeplitz apporte d'importantes simplifications. Il est donc préférable d'utiliser une méthode directe partant du fait qu'une suite infinie de nombres est DNN si sa transformée de Fourier est une fonction NN, ce qui en théorie du signal traduit le caractère NN de la densité spectrale d'un signal. Comme dans le cas d'une covariance d'un signal MA( $q$ ) cette suite de nombres ne comporte que  $q$  termes et comme la covariance  $\gamma_k$  est une fonction paire de  $k$ , la condition pour qu'une suite de  $q$  nombres soit la covariance d'un signal MA( $q$ ) de puissance unité s'écrit

$$G(\omega) \triangleq 1 + 2 \sum_{k=1}^q \gamma_k \cos(k\omega) > 0, \quad (2)$$

$\forall \omega \in [-\pi, \pi]$ , qui est la condition sur le polynôme trigonométrique indiquée dans l'introduction.

Pour  $q = 1$  et  $\gamma_1 = a$ , cela donne  $|a| \leq 1/2$  qui est la limite de la situation étudiée ci-dessus pour les matrices de Toeplitz  $T_2$  et  $T_3$ .

Considérons maintenant le cas  $q = 2$  caractérisant un signal MA(2). Posons

$\gamma_1 = x$  et  $\gamma_2 = y$ . La fonction  $G(\omega)$  prend alors la forme

$$G(\omega) = 1 + 2x \cos(\omega) + 2y \cos(2\omega). \quad (3)$$

Il s'agit alors de déterminer le domaine  $D_+$  du plan  $x \times y$  où cette fonction est NN pour tout  $\omega \in [-\pi, +\pi]$ . On peut d'ailleurs se contenter de l'intervalle  $\mathcal{I} = [0, \pi]$  puisque  $G(\omega)$  est paire.

On note tout d'abord que  $G(0) = 1 + 2(x + y)$  et que  $G(\pi) = 1 - 2(x - y)$ . La non négativité de  $G(\omega)$  nécessite donc que les deux conditions

$$y \geq x - 1/2 \quad (a) \quad ; \quad y \geq -x - 1/2 \quad (b) \quad (4)$$

soient réalisées. Elles déterminent deux courbes séparatrices qui sont des droites perpendiculaires se coupant au point de coordonnées  $(0, -1/2)$  et inclinées de 45 degrés par rapport aux axes  $x, y$ .

Pour localiser les extrema de  $G(\omega)$  il convient de calculer sa dérivée qui peut s'écrire sous la forme

$$G'(\omega) = -2 \sin(\omega) q(\omega) \quad \text{avec} \quad q(\omega) = x + 4y \cos(\omega). \quad (5)$$

On note alors qu'en raison du terme  $\sin(\omega)$  les fréquences 0 et  $\pi$  déjà rencontrées sont des extrema et pour savoir s'il y en a d'autres il reste à savoir si la fonction  $q(\omega)$  peut s'annuler dans l'intervalle considéré.

La fonction  $q(\omega)$  de (5) ne peut s'annuler si  $|x/4y| > 1$ , c'est-à-dire si

$$|y| < (1/4)|x|, \quad (6)$$

qui détermine deux droites séparatrices dans le plan  $x \times y$ . Ainsi si les conditions (4) et (6) sont réalisées, la fonction  $G(\omega)$  est NN dans l'intervalle  $\mathcal{I}$  considéré.

Supposons maintenant que (6) ne soit pas réalisé. La fonction  $q(\omega)$  de (5) est alors nulle pour la fréquence  $\omega$  de  $\mathcal{I}$  telle que  $\cos(\omega) = -x/(4y)$ . La valeur de l'extremum  $G_e$  de  $G(\omega)$  s'obtient en insérant cette valeur dans (3), ce qui donne

$$G_e = (-1/y)T, \quad (7)$$

avec

$$T = 2y^2 - y + (1/4)x^2. \quad (8)$$

On a donc  $G_e > 0$  si et seulement si le produit  $yT < 0$ , soit  $y > 0$  et  $T < 0$  ou  $y < 0$  et  $T > 0$ . Ainsi la positivité de  $G_e$  dépend essentiellement du signe de  $T$  qui ne dépend que de  $x$  et  $y$ . Pour  $x$  donné,  $T$  est un trinôme du second degré

en  $y$  et son discriminant vaut  $\Delta = 1 - 2x^2$ . Si  $\Delta < 0$ , soit  $|x| > \sqrt{2}/2$ ,  $T$  n'a pas de racine en  $y$  et  $T > 0$ .

Quand au contraire  $|x| < \sqrt{2}/2$ , on obtient  $T < 0$  si  $y_1 < y < y_2$  avec

$$y_1 = (1/4)[1 - \sqrt{1 - 2x^2}] \text{ (a)} ; \quad y_2 = (1/4)[1 + \sqrt{1 - 2x^2}] \text{ (b)}. \quad (9)$$

On note que  $y_1 > 0$  de sorte que dans le demi plan  $y < 0$  on a  $T > 0$ , ce qui se voit directement sur (8).

Par contre dans le demi plan  $y > 0$  l'équation  $T = 0$  définit une ellipse  $E$  symétrique par rapport à l'axe des  $y$  de centre  $(0, 1/4)$  et de sommets  $(0,0)$ ,  $(0, 1/2)$ , et  $\pm\sqrt{2}/2$ . Les équations (9) définissent les branches supérieures et inférieures de cette ellipse. L'ensemble des courbes séparatrices dans le premier quadrant du plan  $x \times y$  apparaît sur la figure 1. Les droites  $L_1$  et  $L_2$  correspondent respectivement aux équations  $y = (1/4)x$  et  $y = x - 1/2$ . Il est intéressant de noter que ces trois courbes ont un point commun  $M$  de coordonnées  $(2/3, 1/6)$  et de plus que la droite  $L_2$  est tangente à l'ellipse  $E$  en ce point. Ces courbes séparatrices définissent six domaines disjoints  $D_i$  apparaissant sur la figure 1.

On peut alors déduire des inégalités précédentes le domaine du premier quadrant dans lequel la fonction  $G(\omega) \geq 0$  pour  $\omega \in \mathcal{I}$ . Cette propriété apparaît si et seulement si le point  $P$  de coordonnées  $(x, y)$  appartient au domaine  $D_+ = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ . Ce domaine  $D_+$  détermine ainsi l'ensemble des valeurs de  $x, y$  du premier quadrant telles que la suite infinie  $1, x, y, 0, 0, \dots$ , peut être la covariance d'un signal MA(2) de variance unité. Ce domaine et son complémentaire apparaissent sur la figure 2.

Il convient maintenant de compléter ce résultat en examinant le cas des trois autres quadrants du plan  $x \times y$ . Pour le quadrant  $x < 0, y > 0$  il suffit de faire une symétrie par rapport à l'axe des  $y$ . Pour le demi-plan  $y < 0$  on n'a plus à considérer l'ellipse qui a une intersection nulle avec ce demi-plan. Pour les points  $(x, y)$  de ce demi-plan la fonction  $q(\omega)$  de (5) n'a pas de zéro et les seuls extrema de  $G(\omega)$  dans  $\mathcal{I}$  sont aux points extrêmes 0 et  $\pi$  de sorte que les seules courbes séparatrices sont les droites définies par l'équation (4). Le domaine  $D_+$  dans le plan complet  $x \times y$  apparaît sur la figure 3.

Il est intéressant de présenter une «vérification expérimentale» de ces résultats. Pour ceci on a élaboré un programme calculant la fonction  $G(\omega)$  pour un couple  $(x, y)$  donné et détectant si elle prend dans l'intervalle  $[0, \pi]$  des valeurs négatives ou non. Ceci permet de déterminer pour chaque  $x$  la valeur de  $y$

pour laquelle on passe du premier au second cas. Ces points « expérimentaux » doivent se situer sur la frontière du domaine  $D_+$ . On obtient ainsi une suite de points et l'on voit sur la figure 3 qu'ils ont exactement la propriété attendue. On peut donc considérer que la courbe apparaissant sur cette figure est bien la séparatrice entre les domaines  $D_+$  et  $D_-$  où la fonction  $G(\omega)$  peut être ou non la densité spectrale d'un signal MA(2) dont la covariance s'écrit 1,  $x$ ,  $y$ , toutes les autres valeurs suivantes étant nulles.

Il convient d'expliquer le mot « expérimental » qui vient d'être utilisé alors qu'aucune expérience au sens physique du terme n'a été utilisée. Il est pourtant courant dans de nombreux domaines de la physique de réaliser des « expériences sur ordinateur » et d'importants résultats ont ainsi été trouvés, notamment en mécanique statistique. Dans notre expérience le point de départ est la fonction  $G(\omega; x, y)$  de (3). Aucun calcul n'est effectué sur cette fonction. L'expérience consiste simplement à savoir si elle prend ou non des valeurs négatives sur l'intervalle  $[-\pi, +\pi]$  pour des valeurs données de  $x$  et  $y$ . Ceci peut se réaliser pour n'importe quelle fonction et ignore complètement la structure mathématique de  $G(\omega; x, y)$  qui a été utilisée dans les calculs précédents. En fait l'expérience aurait pu être réalisée par un dispositif physique particulier et sans ordinateur qui ne fait qu'en simuler la réalisation.

On retrouve évidemment sur la figure 3 les résultats déjà mentionnés pour les signaux MA(1). Il suffit pour cela de prendre soit  $x = 0$ , soit  $y = 0$ . Par ailleurs on note que l'appartenance au domaine  $D_+$  exige que  $|y| < 1/2$  alors que ces inégalités ne sont plus valables pour  $x$  qui doit simplement satisfaire les inégalités  $|x| < \sqrt{2}/2$ .

On peut noter que Moses et Liu (1991) présentent dans leur figure 1 une courbe de forme générale très voisine de celle apparaissant sur notre figure 3 sans indiquer comment elle a été calculée. La différence apparaissant entre ces deux courbes semble montrer que la première est une simple forme résultant des propriétés générales du domaine et ne correspond pas à un calcul exact comme dans le cas de notre figure 3.

Enfin il est intéressant d'introduire le domaine  $T_+$  du plan  $x \times y$  des points  $(x, y)$  tels que la matrice de Toeplitz  $T_3[1, x, y]$  est DNN. Il est caractérisé par les faits que  $|x| < 1$  et que le déterminant  $D$  de cette matrice est NN. Ce déterminant vaut  $D = 1 - y^2 + 2x^2y - 2x^2$ . Il est facile de voir que le domaine  $T_+$  est délimité par la parabole  $P$  d'équation  $y = 2x^2 - 1$  et la droite  $L$  d'équation  $y = 1$ . Ce domaine est représenté sur la figure 4 et, comme attendu, il contient



le domaine  $D_+$  déterminé précédemment et représenté sur la figure 3. Les points  $x, y$  appartenant à  $T_+$  et extérieurs à  $D_+$  sont ceux pour lesquels la matrice  $T_3[1, x, y]$  est DNN mais tels que la suite infinie  $[1, x, y, 0, \dots, 0, \dots]$  n'est pas une fonction DNN, c'est-à-dire ne peut être la covariance d'un signal MA(2).

### 3 Fonction de covariance d'un signal MA(3)

En introduisant  $\gamma_3 = z$  la relation (3) devient

$$G(\omega) = 1 + 2x \cos(\omega) + 2y \cos(2\omega) + 2z \cos(3\omega), \quad (10)$$

et le domaine  $D_+$  devient l'ensemble des points  $|x, y, z]$  tels que  $G(\omega) \geq 0$  pour tout  $\omega \in [-\pi + \pi]$ . Comme précédemment on peut se limiter à l'intervalle  $[0, \pi]$  car  $G(\omega)$  est paire.

La frontière du domaine  $D_+$  est une surface de l'espace  $x \times y \times z$  relativement complexe à calculer et à représenter. Quelques propriétés générales en ont été données dans (Moses et Liu 1991 et Steinhadt 1988), mais, comme pour  $q = 2$ , aucun calcul exact n'y est présenté. Pour faire la transition entre le cas MA(2) et celui MA(3) nous allons étudier les sections de  $D_+$  par des plans  $z = c$  parallèles au plan  $x \times y$ . Il est évident que le cas  $c = 0$  correspond à la situation étudiée au précédent paragraphe.

Pour les deux fréquences extrêmes 0 et  $\pi$  de cet intervalle on a  $G(0) = 1 + 2(x + y + z)$  et  $G(\pi) = 1 + 2(-x + y - z)$ . Il est nécessaire que ces quantités soient non-négatives soit

$$y \geq x - 1/2 + z \quad (a) \quad ; \quad y \geq -x - 1/2 - z \quad (b) \quad (11)$$

qui est l'extension à 3 dimensions de (4). Pour toute valeur donnée de  $z$  ces deux équations introduisent dans le plan  $x \times y$  un quart de plan défini par deux droites perpendiculaires dont le point commun a pour coordonnées  $[-z, -1/2]$ . Mais tous les points de ce quart de plan ne sont pas nécessairement acceptables car, même non-négative aux fréquences 0 et  $\pi$ , la fonction  $G(\omega)$  peut avoir des valeurs négatives pour des fréquences entre ces deux extrêmes. Pour le savoir il convient, comme précédemment, d'en introduire la dérivée qui s'écrit comme en (5) à condition de remplacer dans cette équation  $q(\omega)$  par  $q_3(\omega)$

$$q_3(\omega) = 12z \cos^2(\omega) + 4y \cos(\omega) + (x - 3z). \quad (12)$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré en la variable  $t = \cos(\omega)$ . Le discriminant réduit vaut  $\Delta' = 4[y^2 - 3z(x - 3z)]$ . Il est négatif si  $y^2 < 3z(x - 3z)$ , inégalité qui

n'est possible que si  $x > 3z$ . Dans ce cas  $q_3(\omega)$  ne s'annule pas et les seuls zéros de  $G'(\omega)$  sont obtenus pour les fréquences 0 et  $\pi$ . Ainsi dans le quart de plan défini par (11) les points du sous-ensemble défini par  $x > 3z$  correspondent à des valeurs de  $x, y, z$  pour lesquels  $G(\omega) > 0$ . On peut noter que cette dernière inégalité n'est possible que si  $z < 1/3$  puisque les trois quantités  $x, y, z$  sont en valeur absolue inférieures à 1 en tant que valeurs d'une fonction de covariance d'un signal de variance unité.

Si le discriminant  $\Delta'$  est positif le trinôme en  $t$  issu de (12) possède deux racines  $t_1$  et  $t_2$ . Il résulte de la définition  $t = \cos(\omega)$  que ces racines ne peuvent introduire des valeurs correspondantes de  $\omega$  que si elles sont en valeur absolue inférieures à 1. L'expression de  $G(\omega)$  pour ces fréquences particulières est assez compliquée et il paraît sans espoir d'obtenir l'expression explicite sous la forme  $y = f(x)$  de la courbe de séparation dans le plan  $x \times y$  entre les domaines où tous les extrema de  $G(\omega)$  sont positifs et ceux l'un au moins est négatif. Par contre à partir de l'expression des racines  $t_1$  et  $t_2$  on peut obtenir les valeurs  $e(x, y)$  des extrema de  $G(\omega)$ . En résolvant l'équation implicite  $e(x, y) = 0$  on obtient la courbe de séparation  $C$  recherchée qui apparaît en trait continu sur la figure 5 dans le cas où  $z = 0.1$ .

Le résultat final apparaît aussi sur cette figure. On y voit les deux droites  $L_1$  et  $L_2$  définies par (11) et la portion de parabole  $P$  où le discriminant de (12) est nul. Reprenant la méthode expérimentale décrite précédemment on a reporté sur la figure les points expérimentaux obtenus. On constate qu'ils sont parfaitement situés sur les deux portions de droites  $L_1$  et  $L_2$  et sur la courbe théorique  $C$ . On constate par ailleurs que les trois courbes ont un point commun pour  $x = 0.8$ . Cette figure doit être comparée à la précédente et montre comment évolue le domaine  $D_+$  lorsque  $z$  varie de 0 à 0.1. Pour compléter la connaissance de cette évolution il convient de prendre en considération d'autres valeurs de  $z$  et nous allons en donner quelques exemples.

Ceci apparaît sur les quatre éléments de la figure 6. Ce sont les mêmes figures que la figure 5 mais obtenues pour quatre différentes valeurs de  $z$ . On voit comment le domaine  $D_+$  se rétrécit lorsque  $z$  croît pour ne plus être qu'un point pour  $z = 0,5$ . La présentation est la même que sur la figure 5. Les courbes en trait continu sont les courbes théoriques et les points correspondent aux résultats des simulations. Comme précédemment l'accord est excellent.

Il convient maintenant de considérer le cas où  $z$  est négatif. On reprend donc les mêmes expériences avec la même présentation. Les résultats apparaissent

sur la figure 7. Les courbes en trait continu indiquent les valeurs théoriques et les points les résultats expérimentaux. Comme précédemment l'accord est excellent et il apparaît en plus une propriété que nous allons expliquer. On constate en effet que les courbes de la figure 7 sont symétriques par rapport à l'axe des  $y$  de celles de la figure 6. Ce résultat peut être simplement expliqué.

La fonction  $G(\omega)$  de (10) est évidemment une fonction des trois variables  $x, y, z$  et peut donc s'écrire  $G(\omega; x, y, z)$ . Il résulte de (10) que

$$G(\pi - \omega; x, y, z) = G(\omega; -x, y, -z). \quad (13)$$

Comme le domaine  $D_+$  est l'ensemble des points  $x, y, z$  pour lesquels  $G(\omega; x, y, z) > 0$  pour tout  $\omega$  dans l'intervalle  $[0, \pi]$ , il résulte de (13) que si un point de coordonnées  $x, y, z$  appartient à  $D_+$  il en est de même pour le point de coordonnées  $-x, y, -z$  et réciproquement. Ceci explique que les courbes frontières de  $D_+$  dans le plan  $x \times y$  obtenues pour une valeur de  $z$  sont symétriques par rapport à l'axe des  $y$  de celles obtenues en remplaçant  $z$  par  $-z$ , ce que l'on voit clairement en comparant les figures 6 et 7.

L'ensemble de ces résultats permet de se faire une assez claire idée du domaine  $D_+$  dans tout l'espace à trois dimensions  $x \times y \times z$ .

## 4 Conclusion

Le but de ce travail a été de déterminer le domaine  $D_+$  auquel doivent appartenir les valeurs de la fonction de covariance d'un modèle MA. Ce problème a été largement traité pour les modèles AR et a trouvé une solution complète par l'usage des coefficients de réflexion et la représentation en treillis qu'ils permettent d'introduire. Une telle simplification n'existe pas dans le cas MA et l'on est contraint de traiter directement les valeurs de la fonction de covariance. Par contre l'avantage de la représentation MA est que cette fonction ne possède qu'un nombre fini  $q$  de valeurs non nulles. Cette apparente énorme simplification semble laisser penser que le domaine  $D_+$  contenant ces  $q$  paramètres doit être relativement simple à obtenir. En fait nous avons montré qu'il n'en est rien et même pour les cas  $q = 2$  et  $q = 3$  que nous avons analysés en détail on tombe sur des calculs qui sont relativement laborieux, même s'ils n'introduisent aucune difficulté de principe. Ces calculs ont été vérifiés par une approche dite expérimentale ou de simulation. Cette approche qui n'a eu qu'un rôle de vérification dans cet article peut sans difficulté être utilisée pour des valeurs plus élevées de  $q$  pour lesquelles la théorie risque d'introduire des calculs

inextricables même si les principes mathématiques restent simples. Mais pour  $q > 3$  se pose également le problème de la représentation des résultats. Il serait intéressant d'analyser au préalable si une représentation particulière pourrait simplifier la procédure, comme les treillis l'on fait dans le cas autorégressif. L'analyse des résultats obtenus dans cet article ne permet pas pour l'instant de garantir la possibilité une telle perspective.

## **Bibliographie**

Kay S. (1988). *Modern Spectral Estimation : Theory and Application*, Prentice Hall, New York.

Moses L. and Liu D., (1991). Optimal nonnegative definite approximation of estimated moving average covariance sequences, *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 39, n. 9, p. 2007-2015.

Picinbono B. (1995). *Signaux aléatoires. Bases du traitement statistique du signal*, Dunod, Paris.

Steinhardt A., (1988). Correlation matching by finite length sequences, *Signal Processing, IEEE Transactions on*, Vol 36, n. 4, p. 545-559.

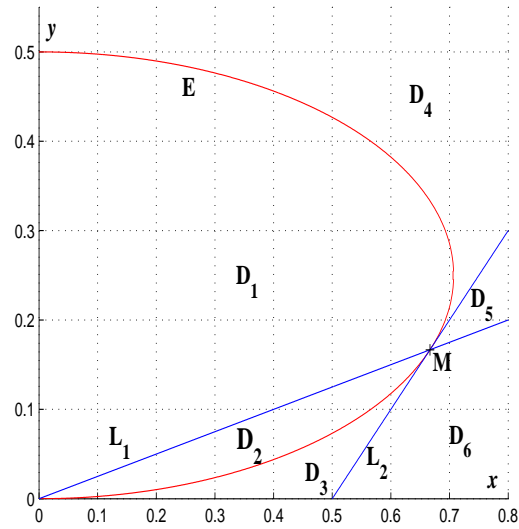


FIGURE 1 – Courbes séparatrices de domaines dans le premier quadrant.

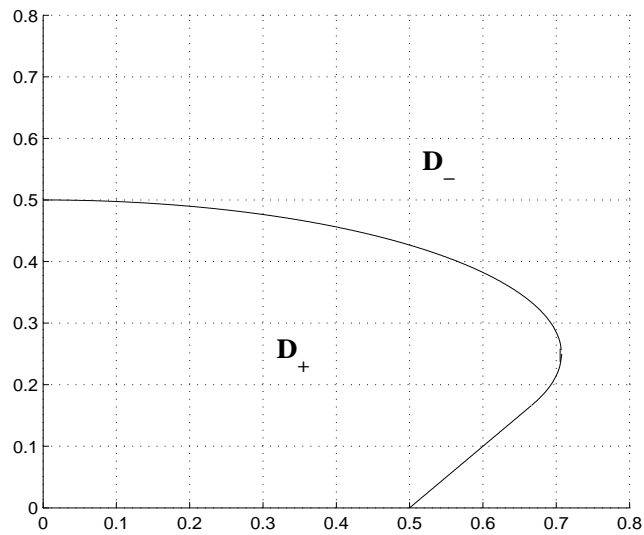


FIGURE 2 – Domaine  $D_+$  de positivité et son complémentaire  $D_-$  dans le premier quadrant.

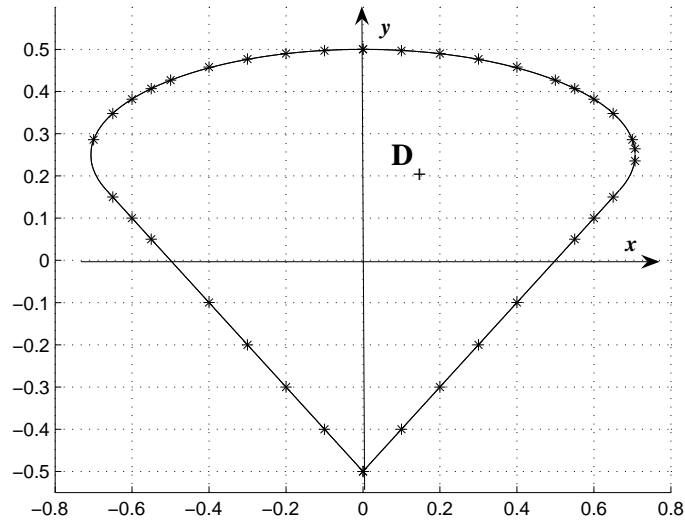


FIGURE 3 – Domaine  $D_+$  de positivité dans tout le plan  $x \times y$ .

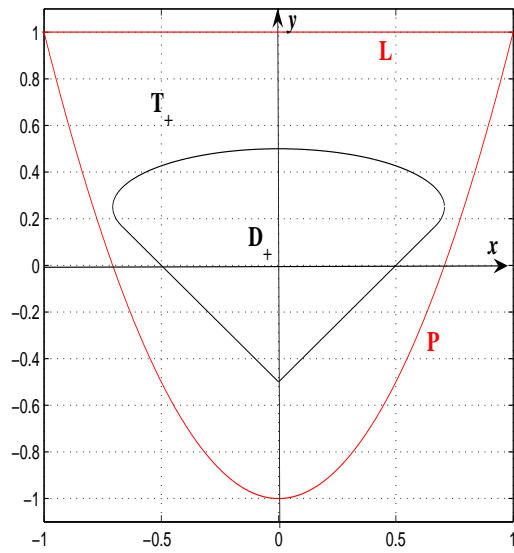


FIGURE 4 – Domaines  $D_+$  et  $T_+$  de positivité dans tout le plan  $x \times y$ .

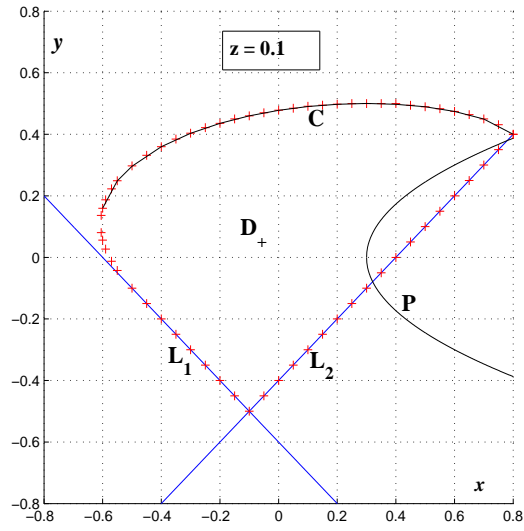


FIGURE 5 – Domaines  $D_+$  de positivité dans tout le plan  $x \times y$  pour  $z = 0.1$ .

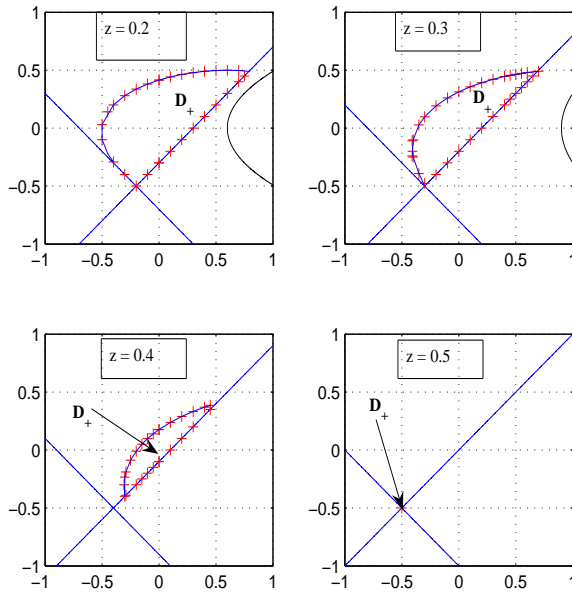


FIGURE 6 – Domaines  $D_+$  de positivité dans tout le plan  $x \times y$  pour quatre valeurs positives de  $z$ .

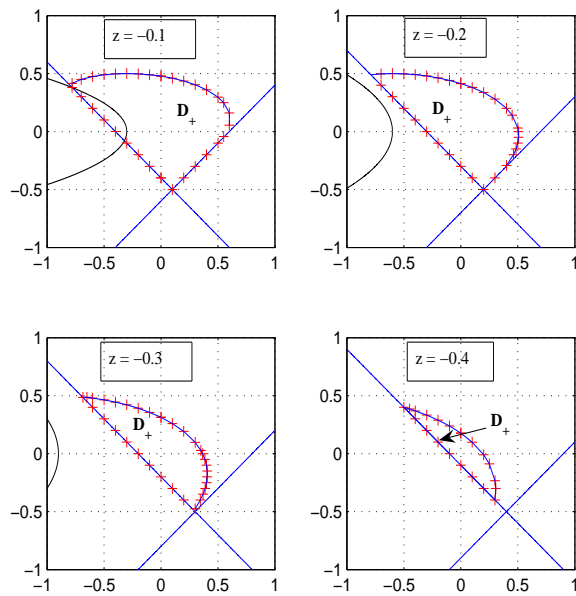


FIGURE 7 – Domaines  $D_+$  de positivité dans tout le plan  $x \times y$  pour quatre valeurs négatives de  $z$ .