



HAL
open science

Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte

Hachmi Ben Dhia, Guillaume Rateau

► **To cite this version:**

Hachmi Ben Dhia, Guillaume Rateau. Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 2001, 332 (7), pp.649-654. 10.1016/S0764-4442(01)01900-0 . hal-04704965

HAL Id: hal-04704965

<https://centralesupelec.hal.science/hal-04704965v1>

Submitted on 11 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

Analyse mathématique de la méthode Arlequin mixte

Hachmi BEN DHIA ^a, Guillaume RATEAU ^b

^a MSS-MAT, UMR 8579, CNRS, ECP, 92295 Châtenay-Malabry cedex, France

^b EDF-DER, MMN, 1 avenue du Général-de-Gaulle, 92141 Clamart cedex, France
Courriel : bendhia@mss.ecp.fr; rateau@mss.ecp.fr

(Reçu le 15 février 2000, accepté après révision le 12 février 2001)

Résumé. On analyse une formulation Arlequin mixte d'un problème d'élasticité, fondée sur un raccord H^1 en « volume ». On montre, en continu et en discret (généralement non conforme), l'existence et l'unicité d'une solution ainsi qu'une majoration optimale d'erreur, moyennant une hypothèse de compatibilité pour le choix des espaces de discrétisation.

Mathematical analysis of the mixed Arlequin method

Abstract. *A mixed Arlequin formulation of an elastic problem based on a “volumic” H^1 -junction procedure is analyzed. The existence and the uniqueness of a solution is proved both in continuous and (generally non-conform) discrete cases, assuming that the finite dimensional spaces satisfy a compatibility condition. Moreover an optimal error estimate is derived.*

Abridged English version

The Arlequin method [2,3] stands for a framework for multimodel and multiscale formulations of mechanical problems (*see* also a recent work of J.-L. Lions [10]). It is based on the following leading steps:

- (i) a superposition of several mechanical states in some zone (the junction zone) of the material system;
- (ii) a distribution of the mechanical energies between those states;
- (iii) a use of a weak junction to link those states to one another.

In the present Note, we consider a junction using Lagrangian multipliers in the *Sobolev* space \mathbf{H}^1 and we look into the existence and the uniqueness of a solution for a linear elastic bidimensional problem defined over a domain $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, where Ω_1 and Ω_2 are two distinct bounded and regular domains of \mathbb{R}^2 such that $\Omega_M = \Omega_1 \cap \Omega_2$ is also a non-empty regular domain (*see* Figure 1). The approximation of the boundary of the domains being not an intrinsic feature of our subject, it will be assumed that all the domains are polygonal. In the sequel, for a Sobolev space $\mathbf{H}^m(\omega)$, the scalar product and the associated norm will be denoted by $(\cdot|\cdot)_{m,\omega}$ and $|\cdot|_{m,\omega}$, respectively. Moreover, we will call mixing couple, any couple of piecewise continuous functions $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ satisfying (4) and (5).

The mixed Arlequin formulation of the linear elastic problem over Ω results in the equations (1), (2), (6)–(9), where α and β are two mixing couples. By using Brezzi’s theory [5], an existence and uniqueness result is given in Theorem 1. The coercivity of the bilinear form $a(\cdot, \cdot)$, defined by (7), is established in a first step and the “Inf-Sup” condition (10) is checked in a second step. The discrete problems obtained by means of the finite element method are defined by (11), (12). To prove for these discrete problems the existence and uniqueness result, formulated in Theorem 3, the main additional step consists in proving that, under regularity hypotheses on the data (particularly for sufficiently regular meshes allowing the use of interpolation theories and inverse inequalities) and under the (compatibility) hypothesis (13), there exists a continuous extension operator from \mathbf{W}_{h_M} to \mathbf{W}_{h_2} (or \mathbf{W}_{h_1}). This result (14) is given in Theorem 2. The proof relies on:

- (i) a regularity result (18) of the solution of Poisson problem (15)–(17);
- (ii) an a priori error estimate (20);
- (iii) an inverse inequality (21) and the continuity of the trace operator which finally leads to (22).

The steps (18)–(20) are quite similar to those used in [4]. Finally, the optimal error estimate (23) is derived by using classical considerations (e.g. [12]). To conclude, let us make some remarks:

- (i) the usual (and more natural) junction using multipliers in the dual space of \mathbf{H}^1 does not give any hint about the way to approximate the continuous problem;
- (ii) the compatibility condition (13) presents no severe inconvenience in practice and the method copes with the superposition of models with incompatible meshes or kinematics;
- (iii) the discrete version is well suited for parallel computation;
- (iv) there is no particular difficulty to extend all the results to three-dimensional case.

1. Introduction

Dans cette Note, nous analysons, pour un problème d’élasticité linéarisée, une formulation Arlequin [2,3] dont le couplage est réalisé par une méthode de dualité fondée sur un raccord de type \mathbf{H}^1 (raccord des déplacements et des déformations). Ceci donne lieu à une formulation mixte. Nous montrons des résultats d’existence et d’unicité pour le problème ainsi obtenu, dans les cadres continu et discret. L’indépendance, dans le cadre discret, des constantes intervenant notamment dans la condition « Inf-Sup » de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi [9,2,5] vis-à-vis de la dimension des espaces d’approximation, permet d’obtenir classiquement une estimation d’erreur a priori optimale (23). Observons qu’un raccord ‘naturel’ par dualité classique (avec des multiplicateurs dans le dual de \mathbf{H}^1) ne pose aucune difficulté en continu mais ne précise pas la démarche à suivre en discret.

2. Formulation Arlequin-mixte continue

On considère ici (pour la clarté) le cas de deux domaines distincts, bornés et réguliers de \mathbb{R}^2 , notés Ω_1 et Ω_2 . Leur réunion est notée Ω et leur intersection, supposée être aussi un domaine non vide et régulier, est notée Ω_M (cf. figure 1). Les questions liées aux approximations des frontières des domaines ne faisant pas partie de nos préoccupations [6], nous supposerons que les différents domaines sont polygonaux. On s’intéresse au cas d’un solide élastique, en petites perturbations, occupant l’adhérence de Ω . On note Γ_0 la partie encastrée de la frontière, supposée être dans $\partial\Omega_1$ et de mesure > 0 . Sur la partie complémentaire de Γ_0 dans $\partial\Omega$, seule une portion notée $\Gamma_g \subset \partial\Omega_1$ est supposée être chargée par une densité linéique d’efforts, notée \mathbf{g} ; l’autre portion étant libre (cf. figure 1). Cette hypothèse sert simplement à réduire les notations. La densité d’efforts surfaciques est notée \mathbf{f} et on suppose que $(\mathbf{g}, \mathbf{f}) \in \mathbf{L}^2(\Gamma_g) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Le produit scalaire naturel de l’espace de Sobolev $\mathbf{H}^m(\omega)$ et la norme associée sont notés $(\cdot, \cdot)_{m,\omega}$ et $|\cdot|_{m,\omega}$, respectivement. On introduit les espaces suivants :

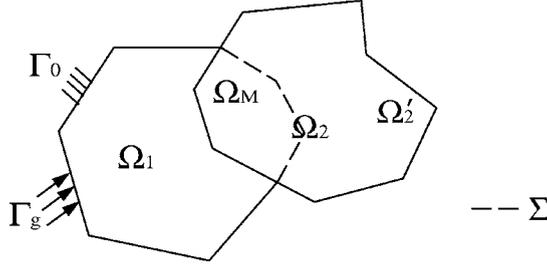


Figure 1. – Superposition des domaines.

Figure 1. – Overlapping domains.

$$\mathbf{W}_1 = \{v_1 \in (H^1(\Omega_1))^2; v_1 = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{W}_2 = (H^1(\Omega_2))^2, \quad \mathbf{W}_M = (H^1(\Omega_M))^2, \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_2, \quad (2)$$

$$\mathbf{V}_A = \{v \in \mathbf{W}; \forall \mu \in \mathbf{A}, (\mu | v_1 - v_2)_{1, \Omega_M} = 0\}, \quad (3)$$

où $\mathbf{A} = \mathbf{W}_M$ ou \mathfrak{R} , \mathfrak{R} désignant les mouvements de corps rigides infinitésimaux de Ω_M .

On appelle couple de mélange tout couple $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, fonctions continues par morceaux sur Ω ;

$$\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 1 \text{ dans } \Omega, \quad \alpha_i \equiv 0 \text{ dans } \Omega \setminus \Omega_i; \quad (4)$$

$$\exists c_0, c_1 > 0; \quad 0 < c_0 \leq \alpha_i \leq c_1 < 1 \text{ dans } \Omega_M \ (i = 1, 2). \quad (5)$$

Une formulation Arlequin du problème, utilisant deux couples de mélange α et β , est la suivante :

$$\text{trouver } (\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W} \times \mathbf{W}_M; \quad \forall (\mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathbf{W} \times \mathbf{W}_M,$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{w}) + b(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}) = \ell(\mathbf{w}), \quad (6)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1) \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \alpha_2 \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_2) \, d\Omega, \quad (7)$$

$$b(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{w}) = (\boldsymbol{\mu} | \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2)_{1, \Omega_M}, \quad (8)$$

$$\ell(\mathbf{w}) = \int_{\Omega_1} \beta_1 \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_1 \, d\Omega + \int_{\Omega_2} \beta_2 \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}_2 \, d\Omega + \int_{\Gamma_g} \mathbf{g} \cdot \mathbf{w}_1 \, d\Gamma. \quad (9)$$

Pour ce problème où nous utilisons des notations classiques et où nous supposons un comportement élastique linéaire du matériau constituant, avec les hypothèses de symétrie et de coercivité pour le tenseur des raideurs élastiques, nous avons le résultat qui suit :

THÉORÈME 1. – Avec les hypothèses de régularité des données, mentionnées ci-dessus, le problème défini par (1), (2), (6)–(9) admet une unique solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W} \times \mathbf{W}_M$.

Démonstration. – Le problème considéré est de nature mixte. Nous appliquons la théorie de Brezzi [5]. Seules la coercivité et la condition « Inf-Sup » sont établies ici (les autres points étant immédiats).

(i) (Coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{V}_{\mathbf{W}_M}$) : nous établissons un résultat plus général (qui nous servira dans le cadre discret), celui de la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$, sous-espace fermé de \mathbf{W} . En raisonnant par l'absurde, on construit une suite dans $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$, normée et notée $(v^n) = (v_1^n, v_2^n)$ telle que $a(v^n, v^n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. En utilisant le fait que (v^n) est normée et l'injection compacte de H^1 dans L^2 , nous déduisons (quitte à extraire une sous-suite, notée encore (v^n)) que (v^n) converge dans $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$, au sens de L^2 -fort. De la coercivité du tenseur des raideurs élastiques et de la stricte positivité de α (5), nous déduisons que $(\boldsymbol{\varepsilon}(v_1^n), \boldsymbol{\varepsilon}(v_2^n)) \rightarrow (0, 0)$, dans $(L^2)^4$ -fort. L'inégalité de Korn permet alors d'affirmer que (v^n) est de Cauchy dans $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$ et donc converge fortement vers (v_1, v_2) dans $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$. En utilisant de nouveau la convergence

vers zéro des tenseurs des déformations, nous déduisons, par passage à la limite forte dans $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$, que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ sont des mouvements de corps rigides infinitésimaux sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. En tenant compte de l'encastrement sur Γ_0 , de mesure > 0 , et de la définition de $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$, on vérifie successivement que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, sur Ω_1 et $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, sur Ω_2 . Or, la convergence forte de (\mathbf{v}^n) , suite normée dans $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$, implique que le champ limite $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est normé. D'où la contradiction.

Comme $\mathbf{V}_{\mathbf{W}_M}$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$, on a aussi montré la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $\mathbf{V}_{\mathbf{W}_M}$.

(ii) (Condition « Inf-Sup ») : pour tout $\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{W}_M$, on sait ([11] dans le cadre des frontières régulières, [8] pour le cas des frontières polygonales, considéré ici) qu'il existe un prolongement continu de $\boldsymbol{\mu}$ à \mathbf{W}_2 , noté $\mathbf{P}\boldsymbol{\mu}$. Il existe alors une constante $C > 0$;

$$\forall \boldsymbol{\mu} \in \mathbf{W}_M, \quad \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{W} \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{|(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)_{1, \Omega_M}|}{|\mathbf{v}|_{\mathbf{W}}} \geq \sup_{\substack{\mathbf{v}_2 \in \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}}} \frac{|(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{v}_2)_{1, \Omega_M}|}{|\mathbf{v}_2|_{1, \Omega_2}} \geq \frac{|(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{P}\boldsymbol{\mu})_{1, \Omega_M}|}{|\mathbf{P}\boldsymbol{\mu}|_{1, \Omega_2}} \geq C |\boldsymbol{\mu}|_{1, \Omega_M}, \quad (10)$$

où $|\cdot|_{\mathbf{W}}$ désigne la norme de l'espace produit \mathbf{W} . On conclut avec le théorème de Brezzi [5]. \square

Notons ici que, dans le cas de l'inclusion ($\Omega_M \equiv \Omega_1$ ou Ω_2), la condition Inf-Sup devient triviale avec $C = 1$, dans (10). Dans la suite, nous ne considérons que le cas où $\Omega_M \subsetneq \Omega_1$ et $\Omega_M \subsetneq \Omega_2$.

3. Discrétisation

Pour $i = 1, 2, M$, on considère des familles de triangulations de Ω_i suffisamment régulières (pour pouvoir appliquer la théorie de l'interpolation et les inégalités inverses). On note \mathbf{W}_{h_i} , les espaces éléments finis linéaires conformes associés [6] et on définit les espaces suivants :

$$\mathbf{W}_h = \mathbf{W}_{h_1} \times \mathbf{W}_{h_2}, \quad \mathbf{V}_{\mathbf{W}_{h_M}} = \{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{W}_h; \forall \boldsymbol{\mu}_{h_M} \in \mathbf{W}_{h_M}, b(\boldsymbol{\mu}_{h_M}, \mathbf{v}_h) = 0 \}. \quad (11)$$

Le problème discret s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \text{trouver } (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_{h_M}) \in \mathbf{W}_h \times \mathbf{W}_{h_M}; \forall (\mathbf{w}_h, \boldsymbol{\mu}_{h_M}) \in \mathbf{W}_h \times \mathbf{W}_{h_M}, \\ & a(\mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h) + b(\boldsymbol{\lambda}_{h_M}, \mathbf{w}_h) + b(\boldsymbol{\mu}_{h_M}, \mathbf{u}_h) = \ell(\mathbf{w}_h). \end{aligned} \quad (12)$$

Nous supposons que l'hypothèse (de compatibilité) suivante est vérifiée :

$$(\mathbf{W}_{h_M} \subseteq \mathbf{W}_{h_1|\Omega_M}) \quad \text{ou} \quad (\mathbf{W}_{h_M} \subseteq \mathbf{W}_{h_2|\Omega_M}), \quad (13)$$

où $\mathbf{W}_{h_i|\Omega_M} = \{ \mathbf{v}_{|\Omega_M}; \mathbf{v} \in \mathbf{W}_{h_i} \}$.

Dans un souci de clarté, nous considérerons, par la suite, le cas où $\mathbf{W}_{h_M} \subseteq \mathbf{W}_{h_2|\Omega_M}$.

Pour établir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème discret, nous énonçons alors le résultat préliminaire suivant (de prolongement continu en discret) :

THÉORÈME 2. – Avec les hypothèses de régularité du théorème 1, celles de régularité des triangulations et l'hypothèse (13),

$$\begin{aligned} & \exists C > 0 \text{ (indépendante de } h_2 \text{ et de } h_M); \forall \boldsymbol{\mu}_{h_M} \in \mathbf{W}_{h_M}, \exists \mathbf{v}_{h_2} \in \mathbf{W}_{h_2}; \\ & \mathbf{v}_{h_2} = \boldsymbol{\mu}_{h_M} \text{ dans } \Omega_M \text{ et } |\mathbf{v}_{h_2}|_{1, \Omega_2} \leq C |\boldsymbol{\mu}_{h_M}|_{1, \Omega_M}. \end{aligned} \quad (14)$$

Démonstration. – On observe qu'il suffit d'établir le résultat pour des champs scalaires (que nous notons μ_{h_M} et v_{h_2}). Pour cela, la démarche consiste à associer à tout $\mu_{h_M} \in H^1(\Omega_M)$, le problème de Poisson suivant : (défini sur $\Omega_2' = \Omega_2 \setminus \Omega_M$ (cf. figure 1)) :

$$\text{trouver } v \in V'; \forall w \in W', \quad (v | w)_{1, \Omega'_2} = 0, \quad (15)$$

$$V' = \{v \in H^1(\Omega'_2); v = \gamma_\Sigma(\mu_{h_M}) \text{ sur } \Sigma\}, \quad (16)$$

$$W' = \{w \in H^1(\Omega'_2); w = 0 \text{ sur } \Sigma\}. \quad (17)$$

La frontière Σ correspond à l'intersection de $\partial\Omega'_2$ avec $\partial\Omega_M$ et $\gamma_\Sigma(\mu_{h_M})$ désigne la trace de μ_{h_M} restreinte à Σ . Ce problème admet une solution unique notée v qui est approchée par v_h , solution éléments finis, définie dans $W_{h_2|\Omega'_2}$. En remarquant que $\gamma_\Sigma(\mu_{h_M}) \in H^1(\Sigma)$ et en utilisant un résultat de régularité de la solution du problème (15)–(17) dans des domaines polygonaux [7,8], nous pouvons affirmer, d'une part, que $v \in H^{1+\varepsilon}(\Omega'_2)$ ($\varepsilon \in [0, \frac{1}{4}]$) et, d'autre part, que :

$$\exists C_1 > 0 \text{ (indépendante de } h_2 \text{ et } \mu_{h_M}); \quad |v|_{1+\varepsilon, \Omega'_2} \leq C_1 |\gamma_\Sigma(\mu_{h_M})|_{1/2+\varepsilon, \Sigma}. \quad (18)$$

L'inégalité triangulaire et la majoration (18) permettent d'affirmer que :

$$|v_h|_{1, \Omega'_2} \leq |v - v_h|_{1, \Omega'_2} + C_1 |\gamma_\Sigma(\mu_{h_M})|_{1/2, \Sigma}. \quad (19)$$

Pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{4}]$, la régularité des maillages et l'hypothèse (13) nous permettent alors d'écrire :

$$\exists C_2 > 0 \text{ (indépendante de } h_2); \quad |v - v_h|_{1, \Omega'_2} \leq C_2 (h_2)^\varepsilon |v|_{1+\varepsilon, \Omega'_2}, \quad (20)$$

$$\exists C_3 > 0 \text{ (indépendante de } h_2 \text{ et de } \mu_{h_M}); \quad |\gamma_\Sigma(\mu_{h_M})|_{1/2+\varepsilon, \Sigma} \leq \frac{C_3}{(h_2)^\varepsilon} |\gamma_\Sigma(\mu_{h_M})|_{1/2, \Sigma}. \quad (21)$$

Nous concluons, en utilisant (18)–(21) et la continuité de la trace, que :

$$\exists C_4 > 0 \text{ (indépendante de } h_2 \text{ et } h_M); \quad |v_h|_{1, \Omega'_2} \leq C_4 |\mu_{h_M}|_{1, \Omega_M}. \quad (22)$$

Cette dernière inégalité nous permet alors d'établir, en utilisant l'hypothèse (13), que le champ v_{h_2} qui vaut μ_{h_M} sur Ω_M et v_h sur Ω'_2 vérifie (14), dans sa version scalaire. \square

Notons que les étapes (18)–(20) sont analogues à celles développées dans [4] pour des problèmes de sous-structuration. Grâce au théorème 2, nous pouvons énoncer le résultat qui suit :

THÉORÈME 3. – *Avec les hypothèses de régularité du théorème 2, le problème défini par (7)–(9), (11) et (12) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\lambda}_{h_M}) \in \mathbf{W}_h \times \mathbf{W}_{h_M}$.*

Démonstration. – On utilise (i) le fait que $\mathbf{V}_{\mathbf{W}_{h_M}}$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{V}_{\mathfrak{R}}$ et la preuve du théorème 1, (ii) le théorème 2, (iii) le théorème de Brezzi [5]. \square

Les constantes de coercivité et de la condition « Inf-Sup » étant indépendantes de h_1 , h_2 et h_M , les théorèmes 1 et 3 permettent d'affirmer (e.g. [12]) que : il existe $C > 0$ (indépendante de h_1 , h_2 et h_M) ;

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_W + |\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}_h|_{1, \Omega_M} \leq C \left\{ \inf_{\mathbf{v} \in \mathbf{W}_h} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_W + \inf_{\boldsymbol{\mu} \in \mathbf{W}_{h_M}} |\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}|_{1, \Omega_M} \right\}. \quad (23)$$

Références bibliographiques

- [1] Babuška I., The finite element method with Lagrange multipliers, Numer. Math. 20 (1973) 179–192.
- [2] Ben Dhia H., Multiscale mechanical problems: the Arlequin method, C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIB 326 (1998) 899–904.
- [3] Ben Dhia H., Numerical modelling of multiscale mechanical problems: the Arlequin method, ECCM'99.
- [4] Bjørstad P.E., Widlund O.B., Iterative methods for the solution of elliptic problems on regions partitioned into substructures, SIAM J. Numer. Anal. 23 (6) (1986) 1097–1120.

- [5] Brezzi F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO, Anal. Numér.* 8 (R2) (1974) 129–151.
- [6] Ciarlet P.G., Basic error estimates for elliptic problems, in: Ciarlet P.G., Lions J.-L. (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis, II. Finite Element Methods (Part 1)*, Amsterdam, 1991, pp. 17–352.
- [7] Dauge M., *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Springer-Verlag, Paris, 1988.
- [8] Grisvard P., *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985.
- [9] Ladyzhenskia O.A., *The Mathematical Theory of Viscous Flow*, 2nd edition, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [10] Lions J.-L., Parallel stabilization hyperbolic and Petrowsky systems, in: Idelson S., Onate E., Dvorkin E. (Eds.), *CIMNE, Comp. Mech.*, Barcelona, Spain, 1998.
- [11] Lions J.-L., Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [12] Thomas J.-M., *Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes*, thèse d'État, université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1977.